f はすべての自然数に対して定義された関数で次の性質を満たすものとする。

$$f(2n)=f(n)\ (n=1,\ 2,\ \cdots),\ f(2n+1)=(-1)^n$$

(1) $f(48)$，$f(1000)$ を求めよ。
(2) 自然数 m，n が奇数のとき，$f(mn)=f(m)f(n)$ が成り立つことを示せ。
(3) すべての自然数 m，n に対して $f(mn)=f(m)f(n)$ が成り立つことを示せ。

＜ '87 津田塾大 ＞

【戦略】

(1) **$f(2n)=f(n)$ という条件は**

$$f(48)=f(24)=f(12)=f(6)=f(3)$$

と，引数をどんどん半分にしていけることを意味します。

そうなるとやがて 2 で割り切れない奇数まで落ちていくでしょう。

そうなれば，$f(2n+1)=(-1)^n$ という性質を利用して仕留めればよいことになります。

こうしてみると，$f(m)$ を考えるにあたり，

$$m=2^A\cdot B\ (A\text{ は非負整数，}B\text{ は正の奇数})$$

という形で考えてみたくなるでしょう。

そうなると，$f(2^A\cdot B)=f(B)$ ということも自然に分かると思います。

$1000=2^3\cdot5^3$ より，$f(1000)=f(125)$ となります。

(2) **最初から奇数のときは，$f(2n+1)=(-1)^n$ と直接運用できますから特に困ることはないはずです。**

(3) **この流れで**

$$m=2^a\cdot\alpha,\ n=2^b\cdot\beta\ (\alpha,\ \beta\text{ は非負整数，}\alpha,\ \beta\text{ は正の奇数})$$

という形で見たくならない方が不思議です。

【解答】

(1) $f(2n)=f(n)\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ …①，$f(2n+1)=(-1)^n$ …②

一般の自然数 m に対して，m を

$$m=2^A\cdot B\ (A\text{ は非負整数，}B\text{ は正の奇数})$$

と表したとき，① より

$$f(m)=f(B)\cdots(*)$$

ということが言える。

$(*)$ より，$f(48)=f(2^4\cdot3)=f(3)$

② より $f(3)=f(2\cdot1+1)=(-1)^1=-1$ …

よって，$f(48)=-1$ …答

また，$(*)$ より，$f(1000)=f(2^3\cdot125)=f(125)$

② より $f(125)=f(2\cdot62+1)=(-1)^{62}=1$

よって，$f(1000)=1$ …答

(2) m，n が奇数のとき，

$$m=2M+1,\ n=2N+1\ (M,\ N\text{ は非負整数})$$

と表せる。

このとき，
$$\begin{aligned}mn&=(2M+1)(2N+1)\\&=4MN+2M+2N+1\\&=2(2MN+M+N)+1\end{aligned}$$

よって，$f(mn)=(-1)^{2MN+M+N}=(-1)^{2MN}\cdot(-1)^{M+N}=(-1)^{M+N}$

一方，② より $f(m)f(n)=(-1)^M(-1)^N=(-1)^{M+N}$

以上から，m，n が奇数のとき，$f(mn)=f(m)f(n)$ が成立する。

(3) $m=2^a\cdot\alpha,\ n=2^b\cdot\beta\ (\alpha,\ \beta$ は非負整数，$\alpha,\ \beta$ は正の奇数$)$ とする。

$mn=2^{a+b}\cdot\alpha\beta$ より，$(*)$ から $f(mn)=f(\alpha\beta)$

(2) より，$f(\alpha\beta)=f(\alpha)f(\beta)$ であるから，$f(mn)=f(\alpha)f(\beta)$

一方，$(*)$ より，$f(m)f(n)=f(\alpha)f(\beta)$

以上から，すべての自然数 m，n に対して $f(mn)=f(m)f(n)$ が成立する。

© MathClinic

【総括】

(3) が最終的なオチですが，このオチに向けて奇数という特殊な場合で乗法性をもつことを示し，それを利用して一般論を示すという流れです。

このような役割を果たす特殊なケースを「先導的特殊」といいます。

なお，今回の関数 f は全ての自然数を定義域とし，値域は $\{1,\ -1\}$ です。

定義域も値域も整数となる関数を整値関数といいます。

乗法性をもつ整値関数の具体例として

・自然数 n の約数の個数を表す関数 $f(n)$

・自然数 n の約数の総和を表す関数 $S(n)$

というものがあります。

m，n が互いに素であるという条件付きで，

$$f(mn)=f(m)f(n)$$

$$S(mn)=S(m)S(n)$$

ということが言えます。

【証明】

＜ f の乗法性の証明＞

$\begin{cases} m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_M^{\alpha_M} \\ n=q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_N^{\beta_N} \end{cases}$ と素因数分解できたとする。

m の約数の個数は $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_M+1)$

n の約数の個数は $(\beta_1+1)(\beta_2+1)\cdots(\beta_N+1)$

m，n が互いに素であるとき，共通素因数はないため

mn の約数の個数は $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_M+1)(\beta_1+1)(\beta_2+1)\cdots(\beta_N+1)$

ゆえに，$f(mn)=f(m)f(n)$ が成り立つ。

＜ S の乗法性の証明＞

$\begin{cases} m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_M^{\alpha_M} \\ n=q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_N^{\beta_N} \end{cases}$ と素因数分解できたとする。

$$\begin{aligned} S(m)&=(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{\alpha_1})(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{\alpha_2})\cdots(1+p_M+p_M^2+\cdots+p_M^{\alpha_M}) \\ &=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\cdots\cdot\frac{p_M^{\alpha_M+1}-1}{p_M-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(n)&=(1+q_1+q_1^2+\cdots+q_1^{\beta_1})(1+q_2+q_2^2+\cdots+q_2^{\beta_2})\cdots(1+q_N+q_N^2+\cdots+q_N^{\beta_N}) \\ &=\frac{q_1^{\beta_1+1}-1}{q_1-1}\cdot\frac{q_2^{\beta_2+1}-1}{q_2-1}\cdot\cdots\cdot\frac{q_N^{\beta_N+1}-1}{q_N-1} \end{aligned}$$

m，n が互いに素であるとき，共通素因数はないため，mn の約数の総和は

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\cdots\cdot\frac{p_M^{\alpha_M+1}-1}{p_M-1}\cdot\frac{q_1^{\beta_1+1}-1}{q_1-1}\cdot\frac{q_2^{\beta_2+1}-1}{q_2-1}\cdot\cdots\cdot\frac{q_N^{\beta_N+1}-1}{q_N-1}$$

ゆえに $S(mn)=S(m)S(n)$ が成り立つ。

© MathClinic