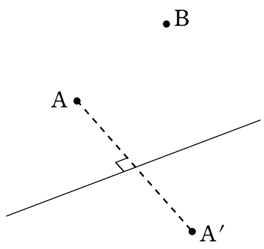
折れ線の長さの最小値【空間において直線上を動く場合】

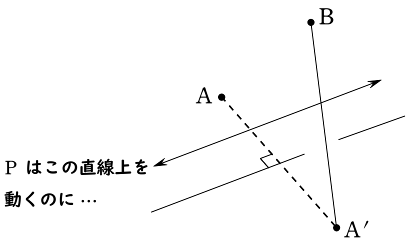
座標空間において，点 A$(1,0,2)$，B$(0,1,1)$ とする。点 P が x 軸上を動くとき，AP＋PB の最小値を求めよ。

＜ '09 早稲田大 ＞

【戦略】



と対称点をとっても，3 次元空間だと



というように，「ねじれの位置関係」となってしまい

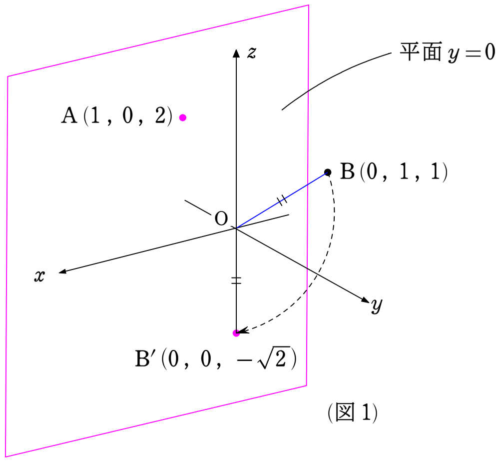
A′，P，B **が一直線上になるように点** P **をとることができないという事態が発生します。**

このようなことが発生してしまわないように，

同一平面上に乗せる

ということをしてから処理します。

【解答】



(図 1)

OB$=\sqrt{2}$ なので，B′$(0,0,-\sqrt{2})$ と定めることにより，
(図 1) のように，B を原点中心に回転させて，平面 $y=0$ 上に乗せることができる。

△OBP と △OB′P において，

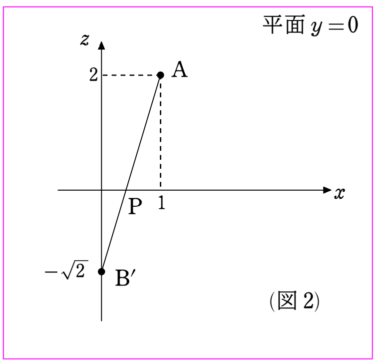
$$\mathrm{OB}=\mathrm{OB'},\ \mathrm{OP}\ (共通),\ \angle\mathrm{BOP}=\angle\mathrm{B'OP}\ (=90^\circ)$$

であり，2 辺とその間の角が等しいため，△OBP ≡ △OB′P

ゆえに，PB＝PB′

したがって，AP＋PB＝AP＋PB′ であり，AP＋PB′ が最小となるときを考えればよい。

したがって，(図 2) から



(図 2)

直線 AB′ と x 軸の交点を P としたとき，AP＋PB′ は最小となる。

その最小値は

$$\begin{aligned}\mathrm{AB'}&=\sqrt{(1-0)^2+\{2-(-\sqrt{2})\}^2}\\&=\sqrt{7+4\sqrt{2}}\ \cdots 答\end{aligned}$$

【総括】

空間だと直線同士がねじれの位置の関係となり，交点をもたないということもあり得てしまいます。

なお，回転によって同じ平面上に乗せるという発想が出なかった場合のエスケープについては，「微分でゴリゴリ」路線でしょうか。

とは言え，ある程度の工夫をしないと茨の道過ぎて出血多量となります。

【エスケープ策】

$\mathrm{P}(x,\ 0,\ 0)$ とすると，$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}=\sqrt{(x-1)^2+4}+\sqrt{x^2+2}$

$f(x)=\sqrt{(x-1)^2+4}+\sqrt{x^2+2}$ とおく。

$x\leqq 0$ の範囲で単調減少，$x\geqq 1$ の範囲で単調増加であるのは明らかであるので，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲を考えることにする。

流石にこの程度の工夫はしたいところです。

$$f'(x)=\frac{2(x-1)}{2\sqrt{(x-1)^2+4}}+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}$$

$$=\frac{(x-1)\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{(x-1)^2+4}}{\sqrt{(x-1)^2+4}\sqrt{x^2+2}}$$

$g(x)=(x-1)\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{(x-1)^2+4}$ とおく。

$$g(x)=x\sqrt{(x-1)^2+4}-(1-x)\sqrt{x^2+2}$$

$$=\frac{x^2\{(x-1)^2+4\}-(1-x)^2(x^2+2)}{x\sqrt{(x-1)^2+4}+(1-x)\sqrt{x^2+2}}$$

分子の有理化

$$=\frac{2(x^2+2x-1)}{x\sqrt{(x-1)^2+4}+(1-x)\sqrt{x^2+2}}$$

$0\leqq x\leqq 1$ の範囲における $f'(x)$ の符号は x^2+2x-1 の符号と一致する。

ゆえに

x	0	$\cdots$	$\sqrt{2}-1$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$	

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}-1)&=\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2+4}+\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2+2}\\ &=\sqrt{10-4\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{2}}\\ &=\sqrt{2}\sqrt{5-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{2}}\\ &=\sqrt{5-2\sqrt{2}}(\sqrt{2}+1)\\ &=\sqrt{(5-2\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)^2}\\ &=\sqrt{(5-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}\\ &=\sqrt{7+4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となり，$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}$ の最小値は $\sqrt{7+4\sqrt{2}}$ となる。