点 $(1,2,4)$ を通り，ベクトル $\vec{n}=(-3,1,2)$ に垂直な平面を α とする。平面 α に関して同じ側に 2 点 $\mathrm{P}(-2,1,7)$，$\mathrm{Q}(1,3,7)$ がある。

(1) 平面 α に関して点 P と対称な点 R の座標を求めよ。

(2) 平面 α 上の点で，PS＋QS を最小にする点 S の座標とそのときの最小値を求めよ。

＜ ’12 鳥取大 ＞

【戦略】

(1) **翻訳すべきは** $\begin{cases}\text{PR と } \alpha \text{ が直交しているということ} \\ \text{線分 PR の中点が } \alpha \text{ 上であるということ}\end{cases}$

の 2 つです。

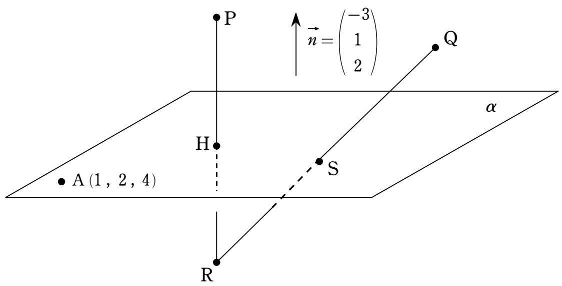
PR **と** α **が直交していることについては** α **の法線ベクトル** $\vec{n}$ **が与えられていますから，** $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=k\vec{n}$ (k は実数) **などとすれば翻訳完了です。**

残るは線分 PR の中点 (H とでも定めます) が α **上にあるということです。**

基本的に α **上の任意の点 X に対して** $\overrightarrow{\mathrm{AX}}$ **と** $\vec{n}$ **は直交します。**

そこで，H が α **上にあるということを** $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{n}=0$ **で翻訳すればよいでしょう。**

(2) **2 次元平面の折れ線問題の基本が頭に入っていれば**



というように，対称点を活用して

PS＋QS＝RS＋QS≧QR **と見ることができるでしょう。**

この S をどのように求めるかですが

S **は** $\begin{cases}\text{直線 QR 上} \\ \quad\text{かつ} \\ \alpha \text{ 上}\end{cases}$ **ということになります。**

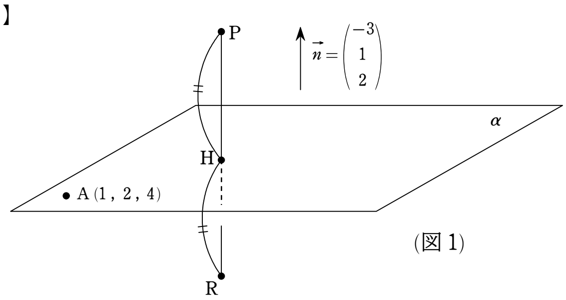
直線 QR 上であることについては $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ **などと表せば翻訳完了です。**

α **上であることについては，(1) 同様** $\overrightarrow{\mathrm{AS}}\cdot\vec{n}=0$ **と翻訳すればよいでしょう。**

これにて t **が求まり S の座標も求まります。**

最小値はもちろん $|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|$ **です。**

【解答】



(図 1)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=k\vec{n}$ (k は実数) と表せる。

これより，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{n}$ なので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\vec{n}\\&=\begin{pmatrix}-2\\1\\7\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-3k-2\\k+1\\2k+7\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(図 1) のように線分 PR の中点 H を定めると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}}{2}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\1\\7\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3k-2\\k+1\\2k+7\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\dfrac{-3k-4}{2}\\\dfrac{k+2}{2}\\k+7\end{pmatrix}\end{aligned}$$

これより，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$$\begin{aligned}&=\begin{pmatrix}\dfrac{-3k-4}{2}\\\dfrac{k+2}{2}\\k+7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\dfrac{-3k-6}{2}\\\dfrac{k-2}{2}\\k+3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

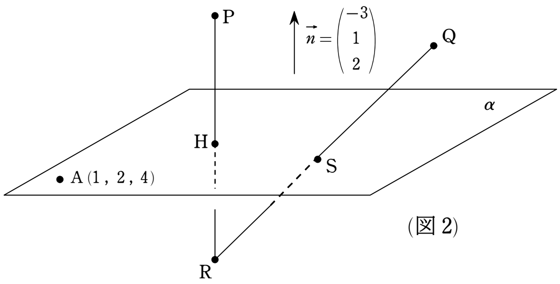
H は α 上の点ゆえ，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=0$ であるため，

$$-3\cdot\frac{-3k-6}{2}+1\cdot\frac{k-2}{2}+2(k+3)=0$$

これより，$k=-2$ を得るため，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}$

以上から，$\mathrm{R}(4,-1,3)$ …㊟

(2)



(図 2)

PS＝RS より，RS＋SQ≧QR
(等号成立は S が直線 QR と α の交点となるとき)

S は直線 QR 上の点なので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OS}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OR}}\\&=\begin{pmatrix}3t+1\\-4t+3\\-4t+7\end{pmatrix}\end{aligned}$$

と表せる。

これより，$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$$\begin{aligned}&=\begin{pmatrix}3t+1\\-4t+3\\-4t+7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3t\\-4t+1\\-4t+3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

S は α 上の点でもあるため，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AS}}=0$ なので

$-3\cdot(3t)+1\cdot(-4t+1)+2(-4t+3)=0$ で，$t=\dfrac{1}{3}$ を得る。

これより，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\begin{pmatrix}2\\\dfrac{5}{3}\\\dfrac{17}{3}\end{pmatrix}$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

$$\begin{aligned}&=\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3\\-4\\-4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ゆえに，$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\sqrt{3^2+(-4)^2+(-4)^2}=\sqrt{41}$

以上から，

S$\left(2,\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{17}{3}\right)$ のとき，PS＋QS は最小値 $\sqrt{41}$ をとる。… 答

【総括】

平面での折れ線問題の基本が頭に入っていれば，さほど発想面で苦労はないはずです。

ベクトルに習熟している必要があるため，手際が悪いと「解決できるかもしれないけど時間を失う」ことになります。

なお，$\vec{n}=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ を法線ベクトルにもち，A (1，2，4) を通る平面 α の方程式は

$$-3(x-1)+(y-2)+2(z-4)=0$$

すなわち $3x-y-2z+7=0$ ということになります。

(1) で $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\begin{pmatrix}\dfrac{-3k-4}{2}\\\dfrac{k+2}{2}\\k+7\end{pmatrix}$ を得ていましたが，H が α 上であることをこの方程式を利用して翻訳すれば

$$3\cdot\frac{(-3k-4)}{2}-\frac{k+2}{2}-2(k+7)+7=0$$

となり，$k=-2$ を得ます。

(2) についても，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\begin{pmatrix}3t+1\\-4t+3\\-4t+7\end{pmatrix}$ と得た後に，S が α 上の点であることを α の方程式を利用すれば

$$3(3t+1)-(-4t+3)-2(-4t+7)+7=0$$

となり，$t=\dfrac{1}{3}$ を得ます。