連続関数 $f(x)$ は

$$f(x)=x+\int_0^x f(x-t)\,dt$$

を満たすものとする。

(1) $f'(x)$ を $f(x)$ を用いて表せ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

＜ ’90 奈良女子大 ＞

【戦略】

勉強していれば，基本事項 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$ を用いていきたいと思えるはずです。

そこで，積分変数である t に対して，被積分関数に含まれる x を摘まみだすことを考えます。

今回は x が「f の奥深く」にいるので，摘出手術は「置換」しかありません。

つまり，$x-t=u$ という置換積分を考えることになります。

これにより，与えられた等式は

$$f(x)=x+\int_x^0 f(u)(-du)\text{，すなわち } f(x)=x+\int_0^x f(u)\,du \ \cdots ①$$

となるため，両辺を x で微分すれば，$f'(x)=1+f(x)$ となり解決です。

(2) **ここでは「積分因子法」で倒してみます。**

$f'(x)-f(x)=1$ **と見れば，両辺に e^{-x} をかけたくなるはずです。**

【解答】

(1) $x-t=u$ とおくと，$dt=-du$ $\quad \begin{array}{c|ccc} t & 0 & \to & x \\ \hline u & x & \to & 0 \end{array}$

このとき，与えられた等式は

$$f(x)=x+\int_x^0 f(u)(-du)$$

すなわち $f(x)=x+\displaystyle\int_0^x f(u)\,du \ \cdots ①$

① の両辺を x で微分すれば，$f'(x)=1+f(x)$ … 答

(2) $f'(x)-f(x)=1$ であり，両辺に e^{-x} をかけると

$$e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=e^{-x}$$

$$(e^{-x}f(x))'=e^{-x}$$

これより，$e^{-x}f(x)=-e^{-x}+C \ \cdots ②$ (C は定数) と表せる。

① において，$x=0$ を代入すれば，$f(0)=0$ を得る。

これより，② で $x=0$ を代入すれば，$0=-1+C$，すなわち $C=1$ を得る。

よって，$e^{-x}f(x)=-e^{-x}+1$ であり，$f(x)=e^x-1$ … 答

【戦略 2】(2) について

$f'(x)=1+f(x)$ **を，**$\dfrac{(1+f(x))'}{1+f(x)}=1$ **と見れば，**

$$\log|f(x)+1|=x+C \quad (C\text{ は定数})$$

と処理できます。

【解 2】(2) について

(1) の結果から，$\dfrac{(1+f(x))'}{1+f(x)}=1$ であり，

$$\log|f(x)+1|=x+C \quad (C\text{ は定数})$$

と表せる。

ゆえに，$|f(x)+1|=e^{x+C}$ より，$f(x)+1=\pm e^{x+C}$
$=(\pm e^C)\cdot e^x$

あらためて，$\pm e^C=K$ とおくと，$f(x)+1=Ke^x$ (K は定数) という形で表せる。

① において，$x=0$ とすれば，$f(0)=0$ を得るため，$K=1$

ゆえに，$f(x)=e^x-1$ … 答

【総括】

⑴ の置換は多少の経験力が必要かもしれません。

（ただし，受験生にやらせてみるとあっさりクリアーする生徒もいますので個人差があると思います。）

⑵ は先入観なしに解くと，【解 2】の方が先に見えた人もいるかもしれません。