$f(x)$ は次の等式を満たす関数とする。

$$f(x)=(e^{-x}+e^{x})\cos x-2x-\int_0^x (x-t)f'(t)\,dt$$

ただし，e は自然対数の底であり，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である。

(1)　$x=0$ のときの関数の値 $f(0)$，および微分係数 $f'(0)$ を求めよ。

(2)　関数 $g(x)$ を $g(x)=e^x f(x)$ で定める。導関数 $g'(x)$ を求めよ。

(3)　関数 $f(x)$ を求めよ。

＜ ’06 東京理科大 ＞

【戦略】

(1)　**基本事項** $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$ **を用いたいところです。**

今回のように， $\int$ **の中に積分変数** t **以外の文字（今回は** x **）が入っている場合，まずはそれを** $\int$ **の外に摘まみだしてから両辺微分します。**

(2)　**指定された置き方により，** $g'(x)=e^x\{f(x)+f'(x)\}$ **という関係式はすぐに得られると思います。**

(1) **の途中経過に現れる**

$$f'(x)=(-e^{-x}+e^x)\cos x+(e^{-x}+e^x)(-\sin x)-2-\int_0^x f'(t)\,dt$$

という式ですが，最後の項は $\Big[f(x)\Big]_0^x=f(x)-f(0)=f(x)-2$ **です。**

つまり， $f(x)+f'(x)$ **を Get できるので解決です。**

(3)　$g'(x)$ **は** $g'(x)=e^{2x}(\cos x-\sin x)-\cos x-\sin x$ **と少々ゴッツい形です。**

$g(x)$ **を求めるにあたっては** $\displaystyle\int e^{2x}(\cos x-\sin x)\,dx$ **について考える必要が出てきます。**

この積分計算については，2 回部分積分をかませば「同形出現」という定番の積分計算です。

【解答】

(1)　$f(x)=(e^{-x}+e^{x})\cos x-2x-\displaystyle\int_0^x (x-t)f'(t)\,dt$ …①

① の両辺に $x=0$ を代入すると，$f(0)=2$ …答

① は $f(x)=(e^{-x}+e^{x})\cos x-2x-x\displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt+\int_0^x tf'(t)\,dt$

と変形できるため，これを両辺 x で微分して

$$f'(x)=(-e^{-x}+e^x)\cos x+(e^{-x}+e^x)(-\sin x)-2-\int_0^x f'(t)\,dt-xf'(x)+xf'(x)$$

整理すると

$$f'(x)=(-e^{-x}+e^x)\cos x+(e^{-x}+e^x)(-\sin x)-2-\int_0^x f'(t)\,dt \quad \cdots ②$$

これに $x=0$ を代入すれば，$f'(0)=-2$ …答

(2)　$\displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt=\Big[f(x)\Big]_0^x=f(x)-f(0)=f(x)-2$　（ ∵ (1) ）

よって，② は

$$f'(x)=(-e^{-x}+e^x)\cos x+(e^{-x}+e^x)(-\sin x)-f(x) \quad \cdots ③$$

と変形できる。

$$\begin{aligned} g'(x)&=e^x f(x)+e^x f'(x)\\ &=e^x\{f(x)+f'(x)\}\end{aligned}$$

③ より，$f(x)+f'(x)=(-e^{-x}+e^x)\cos x+(e^{-x}+e^x)(-\sin x)$ であるから

$$\begin{aligned} g'(x)&=e^x\{(-e^{-x}+e^x)\cos x+(e^{-x}+e^x)(-\sin x)\}\\ &=e^{2x}(\cos x-\sin x)-\cos x-\sin x \quad \cdots 答\end{aligned}$$

(3)　$\displaystyle\int e^{2x}(\cos x-\sin x)\,dx=I$ とする。

$$\begin{aligned} I&=\int\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'(\cos x-\sin x)\,dx\\ &=\frac{1}{2}e^{2x}(\cos x-\sin x)-\int\frac{1}{2}e^{2x}(-\sin x-\cos x)\,dx\\ &=\frac{1}{2}e^{2x}(\cos x-\sin x)+\frac{1}{2}\int e^{2x}(\sin x+\cos x)\,dx\\ &=\frac{1}{2}e^{2x}(\cos x-\sin x)+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}e^{2x}(\sin x+\cos x)-\int\frac{1}{2}e^{2x}(\cos x-\sin x)\,dx\right\}\\ &=\frac{1}{4}e^{2x}(3\cos x-\sin x)-\frac{1}{4}I\end{aligned}$$

これより，$I=\dfrac{1}{5}e^{2x}(3\cos x-\sin x)+C_1$ （C_1 は積分定数）

(2) より

$g(x)=\dfrac{1}{5}e^{2x}(3\cos x-\sin x)-\sin x+\cos x+C$ （ C は積分定数）

$g(0)=e^0 f(0)=2$ であるため，$2=\dfrac{8}{5}+C$，すなわち $C=\dfrac{2}{5}$

これより，$e^x f(x)=\dfrac{1}{5}e^{2x}(3\cos x-\sin x)-\sin x+\cos x+\dfrac{2}{5}$

以上から，$f(x)=\dfrac{1}{5}e^x(3\cos x-\sin x)+\dfrac{1}{e^x}\left(\cos x-\sin x+\dfrac{2}{5}\right)$ …答

【総括】

少し計算はありますが，誘導もある分，発想面の負担は小さいでしょう。

誘導の意味も例題を学習していれば天下りには見えないと思います。