関数 $f(x)$ はすべての実数 s，t に対して

$$f(s+t)=f(s)e^{t}+f(t)e^{s}$$

を満たし，さらに $x=0$ では微分可能で $f'(0)=1$ とする。

(1) $f(0)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}$ を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ はすべての x で微分可能であることを，微分の定義にしたがって示せ。さらに，$f'(x)$ を $f(x)$ を用いて表せ。

(4) 関数 $g(x)$ を $g(x)=f(x)e^{-x}$ で定める 。$g'(x)$ を計算して，関数 $f(x)$ を求めよ。

＜ ’00 東京理科大 ＞

【戦略】

(1) **関数方程式についての扱いとして，特定の値を代入し，題意の値まで辿り着くという常套手段を考えます。**

今回は $s=t=0$ を代入することで，$f(0)=2f(0)$ から $f(0)=0$ を得ます。

(2) (3)

$f(x)$ が $x=a$ で微分可能とは

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ **の極限値が有限確定値として存在すること**

で，このとき，この極限値のことを $f'(a)$ (微分係数) と呼びます。

関数 $f(x)$ が微分可能とは「全ての実数 x で微分可能」であると捉えるのが一般的かつ暗黙の了解であり，文字のニュアンス的に全称的な文字である x をそのまま用いて

$f(x)$ が微分可能とは

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ **の極限値が任意の実数 x に対して有限確定値として存在すること**

と定義します。そして全ての実数 x に対して $f(x)$ が微分可能であるとき，上の極限値のことを $f'(x)$ (導関数) と呼びます。

ざっくり言えば，微分係数と導関数のニュアンスの違いは

$f'(a)$ と a という文字を使うときは「特定の値」

$f'(x)$ と x という文字を使うときは「任意の実数値」

というニュアンスの違いです。

また，派生形として，$a+h=h'$ とおくと

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h'\to a}\frac{f(h')-f(a)}{h'-a}$ **ということでもあるため**

もし，この極限値が有限確定値として存在すれば

$$\lim_{h'\to a}\frac{f(h')-f(a)}{h'-a}=f'(a)$$

ということになります。

極限変数は h' でなければいけない理由はありません。

そこで，$\displaystyle\lim_{h\to a}\frac{f(h)-f(a)}{h-a}$ という極限値を $f'(a)$ と見る見方もあります。

これらの微分の定義を見れば分かると思いますが，

定義で考える極限自体，$\dfrac{0}{0}$ という不定形です。

したがって，$\dfrac{0}{0}$ というタイプの不定形には微分の定義を用いるという活用は常套手段の 1 つです。

(2) では，$\dfrac{f(h)}{h}$ を $\dfrac{f(h)-f(0)}{h-0}$ と見れば，$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=f'(0)$ となり，条件から $f'(0)=1$ でしたから解決します。

(3) は先ほど述べた「微分の定義」そのものであり，問題文は余計なお世話です。

(4) **「$g(x)=f(x)e^{-x}$ と設定しろ」と，手の内を晒してくれています。指示通り，$g'(x)$ を計算すると，$g'(x)=1$ となります。**

このことから $g(x)=x+C$ (C は定数) ということが分かります。

$f(0)=0$ という (1) の結果から，$g(0)=0$ ということも分かりますから $C=0$ となり，$g(x)=x$，すなわち $\dfrac{f(x)}{e^{x}}=x$ が得られ，解決です。

【解答】

$$f(s+t)=f(s)e^{t}+f(t)e^{s}\ \cdots(*)$$

(1) $(*)$ は $s=t=0$ でも成立するので，$f(0+0)=f(0)e^{0}+f(0)e^{0}$

これより，$f(0)=2f(0)$ を得るため，$f(0)=0$ …答

(2)
$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}&=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}\quad(\because(1))\\&=f'(0)\\&=1\ (\because \text{条件})\end{aligned}$$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=1$ …答

(3) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ という極限値が有限確定値として存在することを示す。

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\lim_{h\to0}\frac{f(x)e^{h}+f(h)e^{x}-f(x)}{h}\quad(\because(*))\\&=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}e^{x}+\frac{e^{h}-1}{h}f(x)\right\}\end{aligned}$$

ここで，$u(x)=e^{x}$ とすると，$u(x)$ は全ての実数 x について微分可能であり，$u'(x)=e^{x}$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{e^{h}-1}{h}&=\lim_{h\to0}\frac{u(h)-u(0)}{h-0}\\&=u'(0)\\&=1\end{aligned}$$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=1\cdot e^{x}+1\cdot f(x)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad =e^{x}+f(x)$

となり，全ての実数 x に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ が存在する。

以上から，$f(x)$ は全ての実数 x で微分可能であることが示された。

また，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ という極限値が $f'(x)$ であるので

$$f'(x)=e^{x}+f(x)\ \cdots 答$$

(4)　$g(x)=f(x)e^{-x}$ とすると，

$$\begin{aligned}g'(x)&=f'(x)\cdot e^{-x}+f(x)\cdot(-e^{-x})\\&=e^{-x}\{f'(x)-f(x)\}\\&=e^{-x}\{(e^{x}+f(x))-f(x)\}\ (\because (3))\\&=e^{-x}\cdot e^{x}\\&=1\end{aligned}$$

よって，$g(x)=x+C$（C は定数）と表せる。

ここで，$g(0)=C$ より，$f(0)e^{0}=C$，すなわち $C=0$

つまり，$g(x)=x$ ，すなわち $f(x)e^{-x}=x$ を得る。

以上から，$f(x)=xe^{x}\ \cdots 答$

【総括】

丁寧な誘導がついていますから，その誘導に従って処理していくだけの基礎力があれば，完答すること自体は難しくはないはずです。

前半部分は微分の定義に関する話でした。

本来微分するという行為は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ という極限を計算するという行為です。

いちいちこの極限計算をするのは大変ですから

$f(x)=\sin x$ のとき，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\cdots=\cos x\ \ \therefore\ f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$ のとき，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\cdots=-\sin x\ \ \therefore f'(x)=-\sin x$
などと，その「極限の計算結果」を覚えてしまっていました。

いつしか我々は「微分せずに微分していた」のです。

後半は微分方程式 $f'(x)=f(x)+e^{x}$ について考える問題でした。

厳密には教科書範囲において微分方程式は「発展扱い」ですが，誘導付きで無理なくヒントをつけての出題は本問のようにあり得る話です。
（事実様々な大学で本問の類題が出題されています。）

今回与えられた $g(x)=f(x)e^{-x}$ についての背景を考えてみます。

【誘導の背景】

$f'(x)+A(x)f(x)=\square$ という形に両辺 $e^{\int A(x)\,dx}$ をかけてみます。

一般論でもできますが（後述します）まずは具体例について考えてみます。

<例>　$f'(x)+\sin x\, f(x)=0$

両辺に $e^{-\cos x}$ をかけます。（$f(x)$ の係数 $\sin x$ を積分して e の肩に乗せる）

すると，$e^{-\cos x}f'(x)+e^{-\cos x}\sin x\, f(x)=0$ で，

$$(e^{-\cos x}f(x))'=0$$

となります。

これにより，$e^{-\cos x}f(x)=C$（C は定数）という形になり，$f(x)$ が得られるという流れです

<一般論>
$f'(x)+A(x)f(x)=\square$ に対して，$A(x)$ の原始関数を $B(x)$ とします。
（すなわち，$B'(x)=A(x)$ となる $B(x)$ を考えます。）

このとき，両辺に $e^{B(x)}$ をかけますが，ここでは左辺に注目します

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=f'(x)e^{B(x)}+e^{B(x)}A(x)f(x)\\&=f'(x)e^{B(x)}+e^{B(x)}B'(x)f(x)\\&=f'(x)e^{B(x)}+(e^{B(x)})'f(x)\\&=(e^{B(x)}f(x))'\end{aligned}$$

と，$(\qquad)'$ という形でまとまります。

本問における $f'(x)-f(x)=e^{x}$ に対してだと，両辺に e^{-x} をかけたくなるでしょう。

実際 e^{-x} をかけてみると

$$f'(x)e^{-x}-e^{-x}f(x)=1$$

$$f'(x)e^{-x}+(e^{-x})'f(x)=1$$

$$(e^{-x}f(x))'=1$$

$$e^{-x}f(x)=x+C$$

となり，【解答】の流れに合流します。

本問では，この $e^{-x}f(x)$ という形を誘導としてつけてくれていたわけです。

$f'(x)+A(x)f(x)=\square$ という形に対して，$e^{\int A(x)\,dx}$ を「積分因子」と言います。

今回のような 1 階の微分方程式に対する解法路線の 1 つです。