A，B，C の３人が以下の規則に従って試合を繰り返し行う。各試合において２人が対戦し，残りの１人は待機する。対戦ではどちらか一方が勝利し，引き分けはないものとする。

① 第１試合では A と B が対戦し，C は待機する。
② 第２試合では，第１試合の勝者と C が対戦し，第１試合の敗者は待機する。
③ 同様に，第 $(n+1)$ 試合では，第 n 試合の勝者と第 n 試合で待機した者が対戦し，第 n 試合の敗者は待機する。

A と B が対戦したとき A が勝利する確率は $\frac{2}{3}$，B と C が対戦したとき B が勝利する確率は $\frac{1}{2}$，C と A が対戦したとき C が勝利する確率は $\frac{1}{3}$ である。

第 n 試合において A，B，C が待機する確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とする。

(1) a_2，b_2，c_2 を求め，a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n を用いて表せ。
(2) $b_n - c_n$ を n の式で表せ。
(3) a_n を n の式で表せ。
(4) b_n を n の式で表せ。

＜ ’17 愛媛大 ＞

【戦略】

(1) **待機するとは，その直前で負けているということです。**

a_{n+1} **とは** n **試合目で A が負ける確率です。**

n **試合目で B が待機していた場合，対戦しているのは A と C なので A が負ける確率は** $\frac{1}{3}$ **です。**

n **試合目で C が待機していた場合，対戦しているのは A と B なので A が負ける確率は** $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ **です。**

ゆえに，$a_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{3}c_n$ **となります。**

b_{n+1}，c_{n+1} **も同様に考えます。**

(2) **ここからは確率の要素はなくなり，漸化式の扱いがメインです。**

(1) **より** $\begin{cases} b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{2}{3}c_n \\ c_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{2}{3}b_n \end{cases}$ **と得ていますから，辺々引けば**

$b_{n+1}-c_{n+1}=\frac{2}{3}(b_n-c_n)$ **を得て，等比数列の構造を得ますから所望の** b_n-c_n **が得られます。**

(3) $a_n+b_n+c_n=1$ **に注意すれば，**$a_{n+1}=\frac{1}{3}(b_n+c_n)=\frac{1}{3}(1-a_n)$ **となり，ここから先は消化試合でしょう。**

(4) b_n+c_n **が得られ，(2) から** b_n-c_n **も得られていますから，これも消化試合です。**

【解答】

(1) a_2 は第１試合で A が負ける確率で，$a_2=\frac{1}{3}$

b_2 は第１試合で B が負ける確率で，$b_2=\frac{2}{3}$

C は第２試合に待機することはなく，$c_2=0$

$n+1$ 試合目で A が待機とは，n 試合目で A が負ける場合で，

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{3}c_n \cdots ① \quad \cdots 答$$

同様に考えて，

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{2}{3}c_n \cdots ② \cdots 答, \quad c_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{2}{3}b_n \cdots ③ \cdots 答$$

(2) ②−③ より，$b_{n+1}-c_{n+1}=-\frac{2}{3}(b_n-c_n)$ で，

$$\begin{aligned} b_n-c_n &= (b_1-c_1)\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ &= -\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdots ④ \quad \cdots 答 \end{aligned}$$

(3) $a_n+b_n+c_n=1$ なので，① は $a_{n+1}=\frac{1}{3}(b_n+c_n)$
$=\frac{1}{3}(1-a_n)$

よって，$a_{n+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{1}{4}\right)$ で，

$$a_n-\frac{1}{4}=\left(a_1-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

となり，$a_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ …答

(4) (3) より $b_n+c_n=1-a_n=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ …⑤

④，⑤ より，c_n を消去して b_n を求めると

$$b_n=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdots 答$$

【総括】

実力差があるので，集中して処理しないとミスしそうです。

待機しているということを，直前で負けているというように読み替える力が必要です。

その後の漸化式の扱いについてはスムーズであってほしいレベルです。