A，B，C の３つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，２連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a) １試合目で A と B が対戦する。

(b) ２試合目で，１試合目の勝者と，１試合目で待機していた C が対戦する。

(c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は２以上の整数とする。

なお，全ての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1) n を２以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2) m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 以下で A が優勝したとき，A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ。

＜ ’16 東京大 ＞

【戦略 1】

確率の問題の戦略として，

①：直接推移を追っていき，数え上げによって求める
②：漸化式を立てて，その漸化式を処理して求める

という大枠の路線を考えることは鉄則です。

今回は実験してみると，勝者の移り変わりが規則的な周期性をもちますので，直接推移を追っていけそうです。

(a) A → C → B → A → C → B → ⋯

(b) B → C → A → B → C → A → ⋯

ゲームが続くという前提に立てば，勝者の移り変わりは上の２パターンです。

A が連勝して優勝が決まるというパターンは

(a) パターンの C を A に変える
または
(b) パターンの B を A に変える（最初の B は除く）

ですから，A の優勝が決まる可能性があるのは

２試合目，５試合目，８試合目，⋯
もしくは
４試合目，７試合目，10 試合目，⋯

ということになります。

こうしてみると，(2) の最後の対戦相手が B という現象は，

(b) パターンの B を A に変える

というパターンであることまで分かります。

【解 1】

(1) 優勝チームが出ない前提では，勝者の移り変わりは次の２パターン考えられる。

(a) A → C → B → A → C → B → ⋯

(b) B → C → A → B → C → A → ⋯

このことから，A が優勝する可能性があるのは

$3k+1$（$k=1, 2, \cdots$）試合目 または $3k+2$（$k=0, 1, 2, \cdots$）試合目

（ $\begin{cases} \text{A → C → B の流れが } k \text{ 回（} k=0, 1, 2, \cdots \text{）起こって，A → A となる} \\ \text{B → C → A の流れが } k \text{ 回（} k=1, 2, 3, \cdots \text{）起こって，A となる} \end{cases}$ ）

よって，n 試合目で A が優勝する確率を A_n とすると，

$n=3k\ (k=1, 2, \cdots)$ のとき，$A_{3k}=0$ これより，$A_n=0$

$n=3k+1$（$k=1, 2, \cdots$）のとき，$A_{3k+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3k+1}$

これより，$A_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$n=3k+2$（$k=0, 1, \cdots$）のとき，$A_{3k+2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3k+2}$

これより，$A_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

以上から，n 試合目で A が優勝する確率を A_n（$n=2, 3, \cdots$）は

$$A_n=\begin{cases} 0 & (n \text{ が３の倍数のとき}) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n & (n \text{ が３の倍数でないとき}) \end{cases} \quad \cdots \text{答}$$

(2) 総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝するという事象を A，
優勝したチームの最後に対戦した相手が B であるという事象を X とすると，求める条件付き確率 $P_A(X)$ は

$$P_A(X)=\frac{P(A \cap X)}{P(A)}$$

$P(A)$ について，

$$\begin{aligned} P(A) &= A_2+A_4+A_5+A_7+A_8+\cdots+A_{3m-2}+A_{3m-1} \\ &= (A_2+A_5+A_8+\cdots+A_{3m-1})+(A_4+A_7+\cdots+A_{3m-2}) \\ &= \sum_{k=1}^{m} A_{3k-1}+\sum_{k=1}^{m-1} A_{3k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k-1}+\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k+1} \\ &= \frac{\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}}{1-\frac{1}{8}}+\frac{\frac{1}{16}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}}{1-\frac{1}{8}} \\ &= \frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}+\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\} \\ &= \frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^m \end{aligned}$$

$P(A\cap X)$ は，(b) のパターンで A の優勝が決まる確率なので

$$P(A\cap X)=A_4+A_7+\cdots+A_{3m-2}$$
$$=\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}$$

以上から，求める条件付き確率 $P_A(X)$ は

$$P_A(X)=\frac{P(A\cap X)}{P(A)}$$
$$=\frac{\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}}{\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^m}$$
$$=\frac{8^m-8}{5\cdot 8^m-12}\ \cdots 答$$

【戦略 2】

本問は漸化式からも倒すことができます。

実験から，周期 3 で勝者が移り変わっていくことに目を付け，A_{n+3} を計算してみることにします。

【解 2】(1) について

n 試合目で A の優勝が決まる確率を A_n ($n=2, 3, \cdots$) とし，
最初の 1 試合目で A が勝って n 試合目で A の優勝が決まる確率を a_n
最初の 1 試合目で B が勝って n 試合目で A の優勝が決まる確率を b_n
とすると，$A_n=a_n+b_n$

a_{n+3} は 最初の 3 試合で勝者が A → C → B となり，残り n 試合で A の勝利から始まって A の優勝が決まる確率なので，$a_{n+3}=\frac{1}{8}a_n$

B の勝利から始まると B の連勝で優勝が決まってしまいます。

b_{n+3} は 最初の 3 試合で勝者が B → C → A となり，残り n 試合で B の勝利から始まって A の優勝が決まる確率なので，$b_{n+3}=\frac{1}{8}b_n$

$n=2, 3, \cdots$ なので残りは 2 試合以上あり，
B の勝利からスタートしないと巴戦が終わってしまいます。

よって，$A_{n+3}=a_{n+3}+b_{n+3}=\frac{1}{8}(a_n+b_n)=\frac{1}{8}A_n \cdots (*)$

$$\begin{cases} A_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 & (\text{A の 2 連勝となる確率}) \\ A_3=0 & \\ A_4=\left(\frac{1}{2}\right)^4 & (\text{勝者が B→C→A→A となる確率}) \end{cases}$$
及び (*) から

$$A_{3k+2}=\left(\frac{1}{8}\right)^k A_2=\left(\frac{1}{2}\right)^{3k}\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{3k+2}\quad (k=0, 1, 2, \cdots)$$
$$A_{3k}=\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1}A_3=0\quad (k=1, 2, \cdots)$$
$$A_{3k+1}=\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1}A_4=\left(\frac{1}{2}\right)^{3k+1}\quad (k=1, 2, \cdots)$$

以上から，n 試合目で A が優勝する確率を A_n ($n=2, 3, \cdots$) は

$$A_n=\begin{cases} 0 & (n \text{ が 3 の倍数のとき}) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n & (n \text{ が 3 の倍数でないとき}) \end{cases}\quad \cdots 答$$

【戦略 3】

n 回目に A，B，C が優勝する確率をそれぞれ A_n，B_n，C_n とすると，対称性から $A_n=B_n$ となります。

n 回目に"誰かが優勝する"という確率を P_n とすると，

$$A_n+B_n+C_n=P_n$$

となりますから，$2A_n+C_n=P_n$ となり，$A_n=\dfrac{P_n-C_n}{2}$ です。

よって，P_n，C_n を求めれば解決です。

【解 3】(1) について

n 回目に優勝チームが決まる確率を P_n（$n=2$，3，$\cdots$）とする。

1 試合目で A が勝つとき，2 試合目 〜 n 試合目の勝者の移り変わりは一意的となり，n 試合目で優勝が決まる確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

1 試合目で B が勝つとき，同様に n 試合目で優勝が決まる確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

ゆえに，$P_n=2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$（$n=2$，$3$，$\cdots$）

次に n 回目において C が優勝する確率を C_n とする。

C は最初観戦者なので，C にとっての初戦（2 試合目）は負けると，A または B の連勝を許すことになり，C の優勝がなくなる。

よって，C が優勝するためには，C は 2 試合目は勝つことが必要。

ゆえに，X → C → Y というサイクルで勝者が移り変わり，Y を C に置き換えれば C が優勝となる。

よって，X，Y の決め方が (X，Y)=(A，B)，(B，A) の 2 通りあることに注意すると

$$C_n=\begin{cases} 0 & （n \text{ が } 3 \text{ の倍数でないとき}） \\ 2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} & （n \text{ が } 3 \text{ の倍数のとき}） \end{cases}$$

n 回目に A，B が優勝する確率をそれぞれ A_n，B_n とすると，

$$A_n+B_n+C_n=P_n$$

対称性から $A_n=B_n$ なので，$A_n=\dfrac{P_n-C_n}{2}$

よって

n が 3 の倍数でないとき，$A_n=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-0}{2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

n が 3 の倍数のとき，$A_n=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}{2}=0$

【総括】

「巴戦」という方式の勝者の決め方であり，大相撲の千秋楽で，勝率が同じ力士が 3 人いた場合の優勝者決定の際に用いられる方式です。

有名ネタなので，類題も散見されます。

なお，実力差が同じときは，

$$\lim_{n\to\infty}P(A)=\lim_{n\to\infty}P(B)=\frac{5}{14}，\ \lim_{n\to\infty}P(C)=\frac{2}{7}$$

となります。

$\lim\limits_{n\to\infty}P(A)$ とは「いつか A が優勝する確率」のことであり，この結果から巴戦は

「最初に戦う 2 人がやや有利で，最初の観戦者である人がやや不利」

ということになります。

これは A，B からすると最初に負けても C が勝てば優勝のチャンスが巡ってきますが，C からすれば最初に負けると，相手の連勝を許すことになり，そこで巴戦が終わってしまうからです。