$-\dfrac{1}{4}<s<\dfrac{1}{3}$ とする。xyz 空間内の平面 $z=0$ 上に長方形

$$R_s=\{(x,\ y,\ 0)\mid 1\leqq x\leqq 2+4s\ ,\ 1\leqq y\leqq 2-3s\ \}$$

がある。長方形 R_s を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を K_s とする。

(1) 立体 K_s の体積 $V(s)$ が最大となるときの s の値，およびそのときの $V(s)$ の値を求めよ。

(2) s を (1) で求めた値とする。このときの立体 K_s を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体 L の体積を求めよ。

＜ '11 名古屋大 ＞

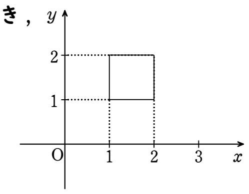
【戦略】

(1) **xy 平面の長方形の x 軸回転体であり，円柱から円柱をくり抜いた体積なので，積分計算は不要です。**

$V(s)$ の式が得られれば，あとは微分し，増減を調べておしまいです。

(2) **(1) の結果から $s=0$ のときを考えればよいことになります。**

このとき，



この正方形の x 軸回転体が K_0 で，タイヤのような立体となります。

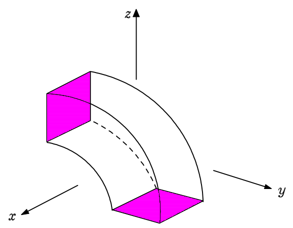
このタイヤの y 軸回転体が今回の立体 L です。

ここからは空間図形の回転体の鉄則

$$\begin{cases}\text{全体像を捨てよ}\\ \text{切ってから回せ}\\ \text{回転の中心からの最大距離・最小距離を捉えよ}\end{cases}$$

にしたがって考えます。

特に切ってから回すためにまずは回転前の K_0 を把握します。



簡単のため，$x>0$，$y>0$，$z>0$ の範囲で図示すると上のようになります。

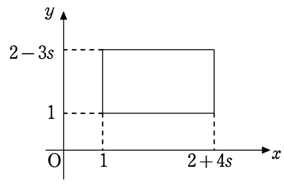
この y 軸回転体を考えるにあたり，y 軸に垂直に切った断面を回転させます。（切ってから回す）

その際の断面は長方形となりますが，$0\leqq t\leqq 1$ で切ったときと，$1\leqq t\leqq 2$ で切ったときで場合分けが発生します。

回転の中心 $(0,\ t,\ 0)$ からの最大距離と最小距離を考えて断面積をとらえていきます。

【解答】

(1) R_s は (図 1) のようになり，K_s は半径 $2-3s$，高さ 1 の円柱から半径 1，高さ $1+4s$ の円柱を除いたものである。



(図 1)

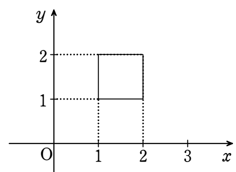
$$\begin{aligned}V(s)&=\pi(2-3s)^2(1+4s)-\pi\cdot 1^2(1+4s)\\&=\pi(1+4s)\{(2-3s)^2-1\}\\&=3\pi(4s+1)(3s^2-4s+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V'(s)&=3\pi\{4\cdot(3s^2-4s+1)+(4s+1)(6s-4)\}\\&=6\pi s(18s-13)\end{aligned}$$

s	$-\dfrac{1}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{3}$
$V'(s)$		$+$	0	$-$	
$V(s)$		$\nearrow$	3π	$\searrow$	

$s=0$ のとき，$V(s)$ は最大値 3π をとる。… 答

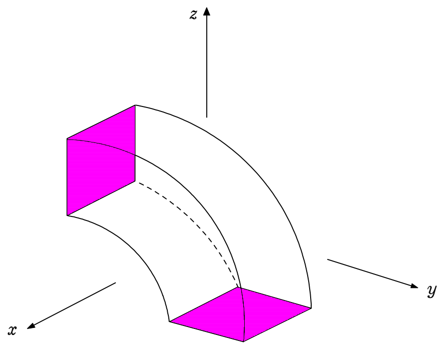
(2) $s=0$ のとき，R_s は (図 2) のような正方形である。



(図 2)

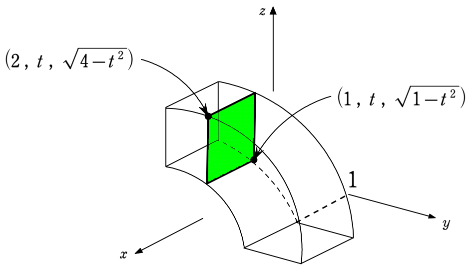
まず，これを x 軸周りに回転させてできる立体 K_0 について考える。

一旦，$\begin{cases}x>0\\ y>0\\ z>0\end{cases}$ の領域内で K_0 の概形を図示すると



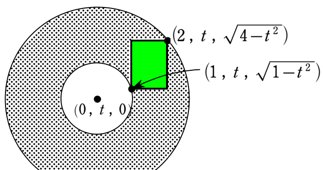
題意の立体 L を $y=t$ $(0 \leqq t \leqq 2)$ で切った断面積を $S(t)$ とする。

(i)　$0 \leqq t \leqq 1$ のとき



この長方形を y 軸の周りに回転させたときの通過領域が
断面 $S(t)$ である。

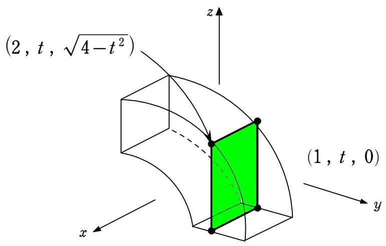
ゆえに $S(t)$ は (図 3) の
打点部分の面積である。



(図 3)

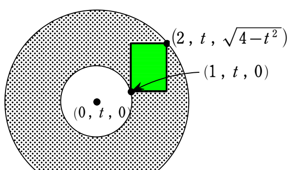
$$
\begin{aligned}
S(t) &= \pi\{4+(4-t^2)\} - \pi\{1+(1-t^2)\} \\
&= 6\pi
\end{aligned}
$$

(ii)　$1 \leqq t \leqq 2$ のとき



この長方形を y 軸の周りに回転させたときの通過領域が
断面 $S(t)$ である。

ゆえに $S(t)$ は (図 4) の
打点部分の面積である。



(図 4)

$$
\begin{aligned}
S(t) &= \pi\{4+(4-t^2)\} - \pi \cdot 1^2 \\
&= (7-t^2)\pi
\end{aligned}
$$

求める体積 V は対称性を考えると

$$
\begin{aligned}
V &= 2\int_0^2 S(t)\,dt \\
&= 2\left\{\int_0^1 6\pi\,dt + \int_1^2 (7-t^2)\pi\,dt\right\} \\
&= 2\left\{6\pi + \pi\left[7t - \frac{1}{3}t^3\right]_1^2\right\} \\
&= \frac{64}{3}\pi \quad \cdots \text{答}
\end{aligned}
$$

【総括】

回転した後の全体像については想像する必要はありませんが，回転前については全体像を把握しておく必要があります。

本問の場合，回転前の全体像を把握するのにエネルギーを要するでしょう。