n 枚のカードがあり，1 枚目のカードに 1，2 枚目のカードに 2，……，n 枚目のカードに n が書かれている。これら n 枚のカードから無作為に 1 枚を取り出してもとに戻すことを 3 回行う。取り出されたカードに書かれている数を取り出された順に x，y，z とする。

(1)　$x>y$ となる確率 p を求めよ。

(2)　$2x=y+z$ となる確率 q を求めよ。

＜ ’00 一橋大 ＞

【戦略 1】

(1) は z は関係ないので 2 枚取り出した段階で考えればよいことに注意してください。

(2) は思考力が問われたと思います。

例題で扱った京都大の問題と違い、この問題は復元抽出 (取り出した後元に戻す試行)ですし，取り出す順番まで考慮に入れなければいけないので勝手が違ったことでしょう。

x が中央の項となる等差数列をなすような (x, y, z) の決め方を求めればよいと見抜く所が一つ目の急所になります。

次に

「x を決める → 公差 d を決める →y，z を決める」

という流れで考えます。解答の ①，② も注意すべき部分です。

さらに x が 1 と n の真ん中 $\dfrac{n+1}{2}$ よりも大きいか小さいかで公差の候補が違ってきます。

したがってまず 1 と n の真ん中が整数か整数でないか，すなわち n の偶奇で場合分けが行われ，そこから x が真ん中よりも大きいか小さいかで調べていくことになります。

解答では対称性を上手く利用して書きましたが、気づかなければ素直に計算してもかまいません。

【解 1】

(1)　2 枚取り出された段階で考える。

(x, y) のうち，$x>y$ となるような数字の決め方は，n 種類のカードから 2 枚選んで大きい方を x，小さい方を y とすればよく，${}_n\mathrm{C}_2$ 通りある。

ゆえに $p=\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{n^2}=\dfrac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2}=\dfrac{n-1}{2n}$ …答

【参考】

$x=y$ となる総数は n 通りあり，残るは $x>y$，$x<y$ となるものを考えればよいが，これは対称性から同じ数だけある。

(x, y) の決め方の全総数が n^2 通りなので，$x>y$ となるものの個数は $\dfrac{n^2-n}{2}$ 通りある。

したがって $p=\dfrac{\frac{n^2-n}{2}}{n^2}=\dfrac{n-1}{2n}$ とやってもよい。

(2)　全てのカードの出方の総数は n^3 通り

そのうち $2x=y+z$ を満たすような (x, y, z) の組の総数を求める。

これは 中央の項が x の等差数列をなすような (x, y, z) の決め方である。

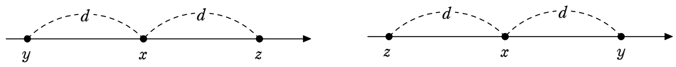
以降この等差数列の公差 d は $d\geqq 0$ として一般性を失わない。

さて，x の値を固定する。このとき公差 d の決め方に応じて (y, z) が決まる。

$d=0$ のときは x の値 1 つに対して (y, z) の決め方は 1 つ。

（$x=y=z$ となるしかない）…①

$d\neq 0$ のときは x の値 1 つに対して (y, z) の決め方は 2 つ。　…②



(Ⅰ)：n が奇数のとき $n=2m-1$（$m=1, 2, \cdots\cdots$）とする。

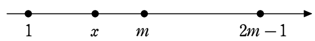
このとき，数直線上における 1 と n の中点は

$$\frac{1+n}{2}=\frac{1+(2m-1)}{2}=m$$

である。

今，$m\geqq 2$ とする。

(Ⅰ－1) $x=1, 2, \cdots\cdots, m-1$ のとき

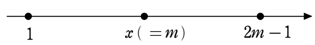


公差 d の取り方は $d=0, 1, 2, \cdots, x-1$ の x 通り

①，②を考えると (y, z) の決め方は $1+2(x-1)=2x-1$【通り】

よって (x, y, z) の決め方は $\displaystyle\sum_{x=1}^{m-1}(2x-1)=(m-1)^2$【通り】

(Ⅰ－2) $x=m$ のとき



公差 d の取り方は $d=0, 1, 2, \cdots\cdots, m-1$ の m 通り

①，② を考えると (y, z) の決め方は $1+2(m-1)=2m-1$【通り】

$x=m$ で決定なので (x, y, z) の決め方は $2m-1$【通り】

(Ⅰ－3) $x=m+1, m+2, \cdots\cdots, 2m-1$（$=m+(m-1)$）のとき

対称性から (x, y, z) の決め方は (Ⅰ－1) のときと同じく

$(m-1)^2$ 通り

$(\text{I}-1)$, $(\text{I}-2)$, $(\text{I}-3)$ から n が奇数のときの (x, y, z) の決め方の総数を N_1 とすると

$$\begin{aligned} N_1 &= 2(m-1)^2+(2m-1) \\ &= 2m^2-2m+1 \end{aligned}$$

$n=2m-1$ より $m=\dfrac{n+1}{2}$ であるから，

$$\begin{aligned} N_1 &= 2\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{n+1}{2}+1 \\ &= \frac{n^2+1}{2} \end{aligned}$$

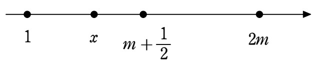
$m=1$，すなわち $n=1$ のときは $N_1=1$ より，この式は $m=1$ のときも成立する。

よって n が奇数のとき $q=\dfrac{N_1}{n^3}=\dfrac{n^2+1}{2n^3}$

(II)： n が偶数のとき $n=2m$ （$m=1, 2, \cdots\cdots$）とする。

このとき，数直線上における 1 と n の中点は

$$\frac{1+n}{2}=\frac{1+2m}{2}=m+\frac{1}{2} \text{ である。}$$



$(\text{II}-1)$ $x=1, 2, \cdots\cdots, m$ のとき

公差 d の取り方は

$$d=0, 1, 2, \cdots, x-1 \text{ の } x \text{ 通り}$$

①，②を考えると (y, z) の決め方は $1+2(x-1)=2x-1$ 【通り】

よって (x, y, z) の決め方は $\displaystyle\sum_{x=1}^{m}(2x-1)=m^2$ 【通り】

$(\text{II}-2)$ $x=m+1, m+2, \cdots\cdots, 2m$ （$=m+m$）のとき

対称性から (x, y, z) の決め方は $(\text{II}-1)$ のときと同じく m^2 通り

$(\text{II}-1)$, $(\text{II}-2)$ より n が偶数のときの (x, y, z) の決め方を N_2 とすると

$$\begin{aligned} N_2 &= 2m^2 \\ &= 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 \quad \left(\because\ n=2m \text{ より } m=\frac{n}{2}\right) \\ &= \frac{n^2}{2} \end{aligned}$$

よって n が偶数のとき $q=\dfrac{N_2}{n^3}=\dfrac{1}{2n}$

以上 (I), (II) より，$q=\begin{cases} \dfrac{n^2+1}{2n^3} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \dfrac{1}{2n} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$ …㊟

【戦略 2】

例題と同様の態度で倒してみたいと思います。

$2x=y+z$ となるとき，$x=\dfrac{y+z}{2}$ なので，題意を満たすような (x, y, z) の決め方は y，z の偶奇が一致するような (y, z) の決め方に等しいことになります。

【解 2】

$2x=y+z$ となるとき，$x=\dfrac{y+z}{2}$ なので，題意を満たすような (x, y, z) の決め方は

y，z の偶奇が一致するような (y, z) の決め方

に等しい。

(i) n が奇数のとき

$n\geqq 3$ のとき

$n=2m+1$ $(m=1, 2, \cdots)$ とおくと，奇数は $m+1$ 枚，偶数は m 枚ある。

y，z がともに奇数となる (y, z) の決め方は

$$(m+1)^2=\left(\frac{n-1}{2}+1\right)^2=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \text{ 【通り】}$$

y，z がともに偶数となる (y, z) の決め方は

$$m^2=\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \text{ 【通り】}$$

よって，y，z の偶奇が一致する (y, z) の決め方は

$$\frac{(n+1)^2}{4}+\frac{(n-1)^2}{4}=\frac{n^2+1}{2} \text{ 【通り】}$$

したがって，n が奇数のとき，$q=\dfrac{\frac{n^2+1}{2}}{n^3}=\dfrac{n^2+1}{2n^3}$

$n=1$ のときは 3 枚とも 1, 1, 1 が確実に出るので，$q=1$

ゆえに $q=\dfrac{n^2+1}{2n^3}$ という式は $n=1$ のときも成立する。

(ii) n が偶数のとき：奇数と偶数はそれぞれ $\dfrac{n}{2}$ 枚ずつある。

y，z がともに奇数となる (y, z) の決め方は $\left(\dfrac{n}{2}\right)^2=\dfrac{n^2}{4}$ 【通り】

y，z がともに偶数となる (y, z) の決め方は $\left(\dfrac{n}{2}\right)^2=\dfrac{n^2}{4}$ 【通り】

したがって，n が偶数のとき，$q=\dfrac{\frac{n^2}{4}+\frac{n^2}{4}}{n^3}=\dfrac{1}{2n}$

よって

$$q=\begin{cases} \dfrac{n^2+1}{2n^3} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \dfrac{1}{2n} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \quad \cdots㊟$$

【総括】

x を決める → $(y\,,\ z)$ を決める

という態度で $(x\,,\ y\,,\ z)$ の決め方を数える【戦略１】と，

$(y\,,\ z)$ を決める → x は自動的に決まる

という態度で $(x\,,\ y\,,\ z)$ の決め方を数える【戦略２】とではかなり労力に差が出ます。

本問は手順的に解く (何か定石に従ってマニュアル的に解く) という態度ではなく，その場力がモノをいう問題でしょう。