　1 から n までの番号のついた n 枚の札が袋に入っている。ただし，$n \geqq 3$ とし，同じ番号の札はないとする。
　この袋から 3 枚の札を取り出して，札の番号の大きさの順に並べるとき，等差数列になっている確率を求めよ。

＜ '05 京都大 ＞

【戦略 1】

$n=3$ のとき

$(1, 2, 3)$ **公差 1**

$n=4$ のとき

$(1, 2, 3), (2, 3, 4)$ **公差 1**

$n=5$ のとき

$(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5)$ **公差 1**
$(1, 3, 5)$ **公差 2**

$n=6$ のとき

$(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6)$ **公差 1**
$(1, 3, 5), (2, 4, 6)$ **公差 2**

$n=7$ のとき

$(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6), (5, 6, 7)$ **公差 1**
$(1, 3, 5), (2, 4, 6), (3, 5, 7)$ **公差 2**
$(1, 4, 7)$ **公差 3**

この実験から，公差を j とでもおいて，公差が 1 となるパターン，公差が 2 となるパターン，…… を全て加えればよいことになります。

ここで問題になるのは，この公差 j のとり得る範囲です。

$(1, 1+j, 1+2j), (2, 2+j, 2+2j), \cdots\cdots, (n-2j, n-j, n)$

という $n-2j$ 通りのいずれかになることを考えるのですが，j の範囲が $n-2j>0$，すなわち $j<\dfrac{n}{2}$ となりますから，この公差 j のとり得る範囲は n の偶奇によって変わってきます。

これは上の実験によって，n が奇数のときに新たな公差の候補が生まれていることからも納得できるでしょう。

あとはこの考察をまとめることになります。

【解 1】

取り出した 3 枚の札の組が

$(1, 1+j, 1+2j), (2, 2+j, 2+2j), \cdots, (n-2j, n-j, n)$

という $n-2j$ 通りのうちのどれかになっていればよい。（$j=1, 2, \cdots$）

ただし，$n-2j>0$ より，$j<\dfrac{n}{2}$

(i)　n が偶数のとき　$n=2m$（$m=2, 3, \cdots$）とすると

$$j<\frac{n}{2}=\frac{2m}{2}=m \text{ より，} j=1, 2, \cdots, m-1$$

このとき，
$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m-1}(n-2j)&=\sum_{j=1}^{m-1}(2m-2j)\\&=2m(m-1)-2\cdot\frac{m(m-1)}{2}\\&=m(m-1)\\&=\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\\&=\frac{n(n-2)}{4}\end{aligned}$$

よって，求める確率は
$$\frac{\frac{n(n-2)}{4}}{{}_n\mathrm{C}_3}=\frac{\frac{n(n-2)}{4}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}=\frac{3}{2(n-1)}$$

(ii)　n が奇数のとき　$n=2m+1$（$m=1, 2, \cdots$）とすると

$$j<\frac{n}{2}=\frac{2m+1}{2}=m+\frac{1}{2} \text{ より，} j=1, 2, \cdots, m$$

このとき，
$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}(n-2j)&=\sum_{j=1}^{m}(2m+1-2j)\\&=m(2m+1)-2\cdot\frac{m(m+1)}{2}\\&=m^2\\&=\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\end{aligned}$$

よって，求める確率は
$$\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}{{}_n\mathrm{C}_3}=\frac{\frac{(n-1)^2}{4}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}=\frac{3(n-1)}{2n(n-2)}$$

以上から，求める確率は
$$\begin{cases}\dfrac{n(n-2)}{4} & (n \text{ が偶数のとき})\\[2mm] \dfrac{3(n-1)}{2n(n-2)} & (n \text{ が奇数のとき})\end{cases}\quad\cdots\text{答}$$

【戦略 2】

【解 1】 では言わば (a, b, c) でいうところの a を基準にして，$a+j$，$a+2j$ としました。

目先を変えて，b を基準にしてみます。$b-k$，b，$b+k$ という等差数列になっているという視点で見てみると，両端の和は

$$(b-k)+(b+k)=2b\ (=\text{偶数})$$

なので，a，c の偶奇が一致することになります。

つまり，偶奇の一致する 2 枚を決めれば，b は自動的に決まることになりますから，結局は「n 枚の中から偶奇が一致するように 2 枚を取る確率」を求めることになるのです。

(この路線においては，n の偶奇で場合分けが発生することも自然に見えるでしょう。)

【解 2】

3 つの整数 a，b，c $(1\leqq a<b<c\leqq n)$ が等差数列をなすとき，

$$b=\frac{a+c}{2}\ \cdots ①$$

a，c の偶奇が一致することが必要で，このような a，c を決めれば ① により b は自動的に決まる。

したがって全取り方 ${}_n\mathrm{C}_3$ 通りのうち題意を満たすものの個数は偶奇の一致する 2 枚の選び方の総数である。

(i) n が偶数のとき

奇数と偶数はそれぞれ $\dfrac{n}{2}$ 枚ずつある。

よって求める確率は $\dfrac{{}_{\frac{n}{2}}\mathrm{C}_2+{}_{\frac{n}{2}}\mathrm{C}_2}{{}_n\mathrm{C}_3}=\dfrac{2\cdot\dfrac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}}=\dfrac{3}{2(n-1)}$ …答

(ii) n が奇数のとき

$n\geqq 3$ なので，$n=2m+1$ $(m=1, 2, \cdots)$ とおくと，奇数は $m+1$ 枚，偶数は m 枚ある。

よって求める確率は

$$\begin{aligned}\frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_2+{}_m\mathrm{C}_2}{{}_n\mathrm{C}_3}&=\frac{\dfrac{(m+1)m}{2}+\dfrac{m(m-1)}{2}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}}\\&=\frac{3m(m+1)+3m(m-1)}{n(n-1)(n-2)}\\&=\frac{3\cdot 2m^2}{n(n-1)(n-2)}\\&=\frac{3\cdot 2\left(\dfrac{n-1}{2}\right)^2}{n(n-1)(n-2)}\qquad\left(\because\ n=2m+1\text{ より，}m=\frac{n-1}{2}\right)\\&=\frac{3(n-1)}{2n(n-2)}\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

【総括】

実際の試験場では【解 1】の方針の方が思いつきやすいと思います。実験から見出したことを一般論で述べる力が問われます。

【解 2】は等差数列を真ん中の数基準で考えたものですが，鮮やかな反面，思いつきづらい路線でしょう。

いずれにせよ，「聞けば簡単だが，試験場では難問」という類いの問題だと思います。