【問題 2】

直線 $\ell : 2x-\sqrt{3}y=0$ と，媒介変数で表された曲線

$$C : x=\tan t\ ,\ y=\frac{1}{\cos t}\quad \left(0\leqq t<\frac{\pi}{2}\right)$$

を考える。

(1) ℓ と C の交点の座標を求めよ。

(2) ℓ と C および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

＜ '14 東北大 ＞

【戦略】

今回与えられたパラメータ曲線は

$$x^2-y^2=-1\ (x\geqq 0\ ,\ y>0)$$

という双曲線の一部を表しています。

(1) $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ **と** $x^2-y^2=-1$ **とを連立させて交点を求めるだけです。**

(2) **双曲線が絡む面積として，** $\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ **を計算する必要性に迫られることになります。**

ノーヒントでのこの積分計算は大変ですが，誘導があれば話は別です。

$\begin{cases} x=\tan t \\ y=\dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$ **とパラメータ表示されているわけですから**

$$\int_0^{\sqrt{3}} y\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}} y\,\frac{dx}{dt}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^3 t}\,dt$$

と話が進みます。

ここから先は，少々大げさかもしれませんが，

$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{(\cos t)^n}\,dt$ **として，積分漸化式を作っていこうと思います。**

【解答】

$\begin{cases} x=\tan t \\ y=\dfrac{1}{\cos t} \end{cases}\quad \left(0\leqq t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して，$x^2=\tan^2 t$

$$=\frac{1}{\cos^2 t}-1$$
$$=y^2-1$$

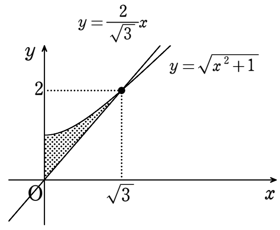
より，C は双曲線 $x^2-y^2=-1$ $(x\geqq 0\ ,\ y>0)$ を表す。

(1) $y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}x$ と $x^2-y^2=-1$ を連立して，$x^2-\dfrac{4}{3}x^2=-1$

これより，$x^2=3$ となり，$x\geqq 0$ より $x=\sqrt{3}$ を得て，
このとき $y=2$

よって，求める交点の座標は $(\sqrt{3}\ ,\ 2)$ …答

(2)



$$\int_0^{\sqrt{3}} y\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}} y\,\frac{dx}{dt}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^3 t}\,dt$$

$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{(\cos t)^n}\,dt$ $(n=0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \cdots)$ とおく。

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{(\cos t)^{n-2}}(\tan t)'\,dt$$

$$=\left[\frac{\tan t}{(\cos t)^{n-2}}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\tan t)\cdot(2-n)(\cos t)^{1-n}(-\sin t)\,dt$$

$$=\sqrt{3}\cdot 2^{n-2}-(n-2)\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2 t}{(\cos t)^n}\,dt$$

$$=\sqrt{3}\cdot 2^{n-2}-(n-2)(I_n-I_{n-2})$$

これより，$I_n=\dfrac{\sqrt{3}\cdot 2^{n-2}+(n-2)I_{n-2}}{n-1}$ を得る。

ゆえに，$I_3=\dfrac{\sqrt{3}\cdot 2+I_1}{2}=\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}I_1$

ここで

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos t}\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{\cos^2 t}\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos t}{(1+\sin t)(1-\sin t)}\,dt$$

この一連の流れは定番と言えるようになっている必要があります。

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos t\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+\sin t}+\frac{1}{1-\sin t}\right\}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{\frac{\cos t}{1+\sin t}+\frac{\cos t}{1-\sin t}\right\}dt$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log|1+\sin t|-\log|1-\sin t|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\log(2+\sqrt{3})$$

ゆえに，$I_3=\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})$

求める面積 S は　$S=I_3-\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 2$

$$=\sqrt{3}+\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}$$

$$=\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})\ \cdots\ 答$$

【総括】

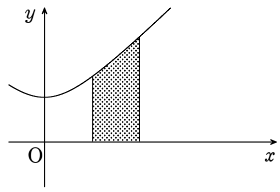
本問は，双曲線 $x^2-y^2=-1$ が絡む面積として $\int\sqrt{1+x^2}\,dx$ が必要になります。

今回の路線は，$\begin{cases}x=\tan t\\ y=\dfrac{1}{\cos t}\end{cases}$ と双曲線をパラメータ表示することで，積分計算をさせるという路線です。

【$\int\sqrt{1+x^2}\,dx$ について】

$y=\sqrt{1+x^2}$ は $x^2-y^2=-1$ $(y\geqq 0)$ $\cdots$ ① という双曲線の一部となります。

よって，$\int_{\bigcirc}^{\square}\sqrt{1+x^2}\,dx$ は



というように，双曲線が絡んだ面積となります。

つまり，$\int\sqrt{1+x^2}\,dx$ を処理するためには双曲線のパラメータ表示を利用する必要があります。

双曲線 ① のパラメータ表示は

(Ⅰ) $\begin{cases}x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\\ y=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\end{cases}$ (双曲線関数の利用)

(Ⅱ) $\begin{cases}x=\tan\theta\\ y=\dfrac{1}{\cos\theta}\end{cases}$ $\left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\left(1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\ \text{の利用}\right)$

(Ⅲ) $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)\\ y=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)\end{cases}$

という方法があります。

(Ⅰ)，(Ⅱ) については【問題 1】【問題 2】で扱いました。

(Ⅲ) については $y^2-x^2=1$ であることから $(y+x)(y-x)=1$ です。

$y+x=t$ とおくと，$y-x=\dfrac{1}{t}$ ということになります。

これら 2 式から $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)\\ y=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)\end{cases}$ を得るわけです。

$y+x=t$ とおいていることから，$t=x+\sqrt{x^2+1}$ と置換することで $\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ を処理できます。

ここから先はご自身の手で確かめてみてください。

$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2}+\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right\}+C\ (C:積分定数)$$

となります。