xyz 空間に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ \sqrt{3},\ 1)$ がある。平面 $z=0$ に含まれ，中心が O，半径が 1 の円を W とする。

点 P が線分 OA 上を，点 Q が円 W の周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R 全体がつくる立体を V_A とおく。

同様に点 P が線分 OB 上を，点 Q が円 W の周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R 全体がつくる立体を V_B とおく。

さらに V_A と V_B の重なり合う部分を V とする。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 平面 $z=\cos\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ による立体 V の切り口の面積を θ を用いて表せ。

(2) 立体 V の体積を求めよ。

＜ ’12 大阪大 ＞

【戦略】

難関大受験生ならば，V_A，V_B が斜めの円柱を表しているところまでは読み取れなければなりません。

そこからが本当の勝負です。

本問の流れは (2) の体積を求めるための誘導として (1) で断面積を訊いています。

V_A の切り口である半径 1 の円と，V_B の切り口である半径 1 の円をガッチャンコしたものが V の断面なので，あとはそれぞれの円の中心を求めにいけばいいですね。

空間座標なので，ベクトルを用いれば簡潔に円の中心が求められると思います。

斜めの円柱の共通部分は目を凝らしてもよく分かりません。

不等式で表現できれば機械的に処理できますが，この斜めの円柱を不等式で表すのも億劫です。

そこで，次なる一手としては

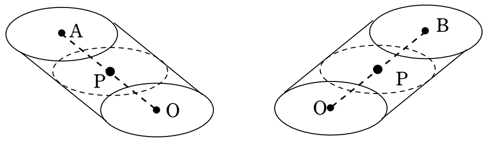
切ってからガッチャンコ

と，先に切った断面をガッチャンコさせるという方針で考えます。

斜めっているとはいえ，$z=\square$ で切った断面は円です。

したがって，円と円をガッチャンコしたものが題意の立体 V を $z=\square$ で切った断面ということになります。

【解答】



(1) V_A を $z=\cos\theta$ で切った切り口は円であり，その中心 T について，

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}=t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\0\\t\end{pmatrix}\ (0\leqq t\leqq1)$$

と表せる。

今，T の z 座標 $=t=\cos\theta$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\0\\\cos\theta\end{pmatrix}$ と表せる。

同様に V_B を $z=\cos\theta$ で切った切り口は円であり，その中心 S について

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s\begin{pmatrix}0\\\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\sqrt{3}s\\s\end{pmatrix}\ (0\leqq s\leqq1)$$

と表せる。

今，S の z 座標 $=s=\cos\theta$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\begin{pmatrix}0\\\sqrt{3}\cos\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}$ と表せる。

以上をまとめると，V_A，V_B を平面 $z=\cos\theta$ で切った切り口はそれぞれ $\mathrm{S}(\cos\theta,\ 0,\ \cos\theta)$，$\mathrm{T}(0,\ \sqrt{3}\cos\theta,\ \cos\theta)$ を中心とする半径 1 の円板であり，この 2 つの円板の共通部分が V を平面 $z=\cos\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ で切った切り口である。

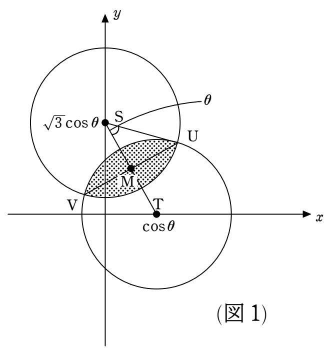
これを 平面 $z=\cos\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上に図示すると (図 1) のようになる。

(図 1) において，$\mathrm{ST}=2\cos\theta$

$\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right.$ の範囲では $\mathrm{ST}<1+1$ より，この 2 円は相異なる 2 点で交わる。)

この 2 円は同じ半径なので，

$\mathrm{SM}=\cos\theta$，$\mathrm{SU}=1$，$\mathrm{ST}\perp\mathrm{UM}$ から，$\angle\mathrm{USM}=\theta$ となる。



(図 1)

ゆえに求める切り口の面積を $S(\theta)$ とすると

$$\begin{aligned}S(\theta)&=\{(\text{扇形 SUV})-(\triangle\mathrm{SUV})\}\times2\\&=\left\{\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot2\theta-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin2\theta\right\}\times2\\&=2\theta-\sin2\theta\ \cdots \text{答}\end{aligned}$$

$\left(\text{注：これは}\ \theta=0,\ \dfrac{\pi}{2}\ \text{のときも成り立つ}\right)$

(2) V の体積を V_0 とすると，$V_0=\int_0^1 S(\theta)\,dz$

$z=\cos\theta$ より $dz=-\sin\theta\,d\theta$，

z	$0 \to 1$
θ	$\frac{\pi}{2} \to 0$

であるから，

$$
\begin{aligned}
V_0&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(2\theta-\sin 2\theta)(-\sin\theta)\,d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\theta-2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\theta\sin\theta-\sin^2\theta\cos\theta)\,d\theta\\
&=2\left\{\Big[-\theta\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\right\}-2\left[\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\frac{4}{3}\ \cdots\ \text{答}
\end{aligned}
$$

【総括】

$z=\cos\theta$ という指示が余計なお世話です。

普通は $z=k$ と切り，切り口に円が現れて「自分で角度 θ を導入する」というのが通常の流れだと思います。

なまじ $z=\cos\theta$ と勝手に置かれると，「どこが θ なんだ」とかえって余計な手間がかかります。恐らく出題者としては親切心でつけた誘導だと思いますが本当に余計なお世話でした。

そしてその余計なお世話は (2) で $\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(\theta)\,d\theta$ という過ちまで誘発しかねません。

ただ，本当に根本理解している受験生を選抜するという意味では良問と呼んでもいいと思います。

あと，細かいですが，体積 (Volume) を V と呼ぶのは分かりますが，立体そのものを V と呼ぶのはやめていただきたいですね。
(V は体積を表現するときに使いたいアルファベットですし)