$x_i>0$ $(i=1,2,3,\cdots)$ のとき，不等式

$$1<\frac{x_1}{x_1+x_2}+\frac{x_2}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n}{x_n+x_1}<n-1$$

が成り立つことを証明せよ。ただし，n は3以上の自然数とする。

＜ '97 愛媛大 ＞

【戦略】

通分したり，差をとって考える方針は収拾がつかなくなることは火を見るより明らかです。

なので，出来る限り与えられた形を崩さずに活かす方針を考えたいところです。

$$\frac{x_k}{x_k+x_{k+1}}\ (k=1,2,\cdots,n-1),\ \text{及び}\ \frac{x_n}{x_n+x_1}$$

が 0より大きく1未満の数 であることは間違いありません。

したがって，題意の n 個の和は

$$0<\frac{x_1}{x_1+x_2}+\frac{x_2}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n}{x_n+x_1}<n$$

であることは容易く言えるわけです。

本問で求められている不等式はこれよりも「厳しく」評価することになります。

先ほどの $0<\dfrac{x_k}{x_k+x_{k+1}}<1$ という評価だとラフ過ぎたということですから，さらに厳しい評価を考えろというわけです。

まず左側の不等号ですが，0にするのはラフということで，もう少し厳しく正の値で下から評価することになります。

そうなると $\dfrac{x_k}{x_1+x_2+\cdots+x_n}<\dfrac{x_k}{x_k+x_{k+1}}$ と，分母を大きくするように評価するのが第一感です。

次に大きくする方への評価ですが1よりも小さい値で上からおさえるわけです。

そうなると $\dfrac{x_k}{x_k+x_{k+1}}=1-\dfrac{x_{k+1}}{x_k+x_{k+1}}<1-\dfrac{x_{k+1}}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$
と見て，1より小さい値で上から押さえます。

もちろんこれで失敗したら，さらに厳しい評価を考えることになるわけですが，幸いにもこの評価で，下からの評価と上からの評価ともに成功します。

【解答】

$x_i>0$ $(i=1,2,3,\cdots)$ より

$$\frac{x_1}{x_1+x_2}>\frac{x_1}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$$

$$\frac{x_2}{x_2+x_3}>\frac{x_2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$$

$$\vdots$$

$$\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n}>\frac{x_{n-1}}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$$

$$\frac{x_n}{x_n+x_1}>\frac{x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$$

辺々加えると，

$$\frac{x_1}{x_1+x_2}+\frac{x_2}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n}{x_n+x_1}>\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{x_1+x_2+\cdots x_n}$$

すなわち $\dfrac{x_1}{x_1+x_2}+\dfrac{x_2}{x_2+x_3}+\cdots+\dfrac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n}+\dfrac{x_n}{x_n+x_1}>1$ …①

一方，

$$\frac{x_1}{x_1+x_2}=1-\frac{x_2}{x_1+x_2}<1-\frac{x_2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$$

$$\frac{x_2}{x_2+x_3}=1-\frac{x_3}{x_2+x_3}<1-\frac{x_3}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$$

$$\vdots$$

$$\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n}=1-\frac{x_n}{x_{n-1}+x_n}<1-\frac{x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$$

$$\frac{x_n}{x_n+x_1}=1-\frac{x_1}{x_n+x_1}<1-\frac{x_1}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$$

辺々加えると，

$$\frac{x_1}{x_1+x_2}+\frac{x_2}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n}{x_n+x_1}<n-\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{x_1+x_2+\cdots x_n}$$

すなわち $\dfrac{x_1}{x_1+x_2}+\dfrac{x_2}{x_2+x_3}+\cdots+\dfrac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n}+\dfrac{x_n}{x_n+x_1}<n-1$ …②

①，② より

$$1<\frac{x_1}{x_1+x_2}+\frac{x_2}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n}{x_n+x_1}<n-1$$

が成立することが示された。

【総括】

差を取るタイプの不等式証明ではなく，項別評価（項を評価していき辺々加える）タイプの不等式証明だったので，慣れていないと方向性の段階で迷いが生じたかもしれません。

$$1=\frac{x_1}{x_1+x_2+\cdots+x_n}+\frac{x_2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}+\cdots+\frac{x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$$

ということを看破できるかについても差が付く要素でしょう。