【復習用問題】

xyz 空間において，不等式

$$\begin{cases} 0 \leqq z \leqq 1+x+y-3(x-y)y \\ 0 \leqq y \leqq 1 \\ y \leqq x \leqq y+1 \end{cases}$$

の全てを満足するような x，y，z を座標にもつ点全体がつくる立体の体積を求めよ。

＜ '82 東京大 ＞

【戦略】

切った文字はその後定数扱いになることを考えれば，y の次数が 1 番高く，登場回数も多いため，今回の選択は $y=k$ で切ります。

【解答】

$y=k$ で切ったときの切り口は

$$\begin{cases} 0 \leqq z \leqq 1+x+k-3(x-k)k \\ 0 \leqq k \leqq 1 \\ k \leqq x \leqq k+1 \end{cases}$$

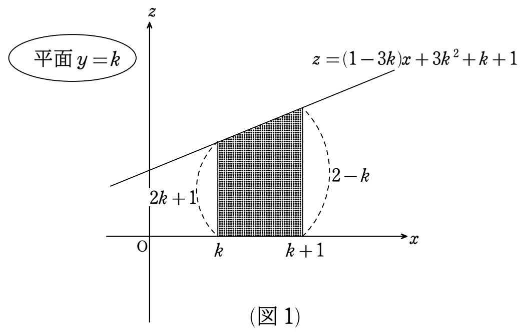
を満たす点 $(x,\ k,\ z)$ の集合

すなわち

$$\begin{cases} 0 \leqq k \leqq 1 \\ k \leqq x \leqq k+1 \\ 0 \leqq z \leqq (1-3k)x+3k^2+k+1 \end{cases}$$

を満たす点 $(x,\ k,\ z)$ の集合である。

これを平面 $y=k$ 上で図示すると (図 1) のようになる。



(図 1)

切り口の面積 $S(k)$ は

$$S(k)=\{(2k+1)+(2-k)\}\times 1\times\frac{1}{2} = \frac{k+3}{2}$$

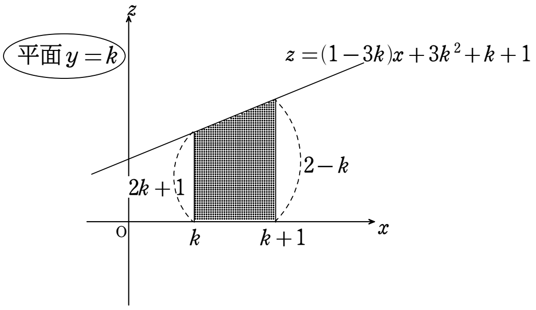
ゆえに，求める立体の体積 V は

$$V=\int_0^1 S(k)\,dk = \int_0^1 \frac{k+3}{2}\,dk = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}k^2+3k\right]_0^1 = \frac{7}{4} \cdots \text{答}$$

【総括】

この問題はさらに難しくできます。

今回 切断面 $y=k$ について $0 \leqq k \leqq 1$ であったから



台形の「$2-k$」の部分が正となり，切り口は台形であったのですね。

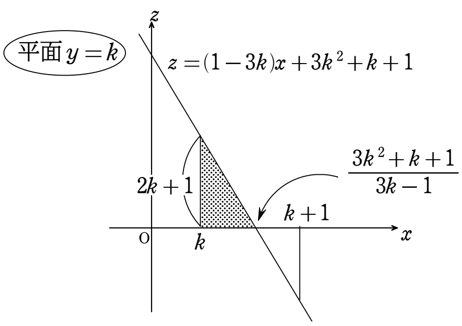
例えば $\begin{cases} 0 \leqq z \leqq 1+x+y-3(x-y)y \\ 0 \leqq y \leqq 3 \\ y \leqq x \leqq y+1 \end{cases}$ だったらどうしますか？

そう，$2-k$ がプラスかマイナスか，すなわち，$0 \leqq k \leqq 2$ か $2 \leqq k \leqq 3$ かで切り口が変わってきますから場合分けを行う必要が出てくることになります。

$0 \leqq k \leqq 2$ のときは切り口は台形で，面積は

$$\begin{aligned} S(k) &= \{(2k+1)+(2-k)\} \times 1 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{k+3}{2} \end{aligned}$$

$2 \leqq k \leqq 3$ のときは切り口は



のようになり，その面積は，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3k^2+k+1}{3k-1}-k\right) \cdot (2k+1) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2k+1)^2}{3k-1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4k^2+4k+1}{3k-1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\{\left(\frac{4}{3}k+\frac{16}{9}\right)+\frac{25}{9} \cdot \frac{1}{3k-1}\right\} \end{aligned}$$

となります。

したがって体積は

$$\int_0^2 \frac{k+3}{2}\,dk + \int_2^3 \frac{1}{2} \cdot \left\{\left(\frac{4}{3}k+\frac{16}{9}\right)+\frac{25}{9} \cdot \frac{1}{3k-1}\right\} dk$$

であり，

$$\int_0^2 \frac{k+3}{2}\,dk = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}k^2+3k\right]_0^2 = 4$$

$$\int_2^3 \frac{1}{2} \cdot \left\{\left(\frac{4}{3}k+\frac{16}{9}\right)+\frac{25}{9}\frac{1}{3k-1}\right\} dk$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}k^2+\frac{16}{9}k+\frac{25}{27}\log(3k-1)\right]_2^3$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{3}(3^2-2^2)+\frac{16}{9}(3-2)+\frac{25}{27}(\log 8-\log 5)\right\}$$

$$=\frac{23}{9}+\frac{25}{54}\log\frac{8}{5}$$

なので，$\begin{cases} 0 \leqq z \leqq 1+x+y-3(x-y)y \\ 0 \leqq y \leqq 3 \\ y \leqq x \leqq y+1 \end{cases}$ で与えられる立体の体積は

$4+\dfrac{23}{9}+\dfrac{25}{54}\log\dfrac{8}{5}$，すなわち $\dfrac{59}{9}+\dfrac{25}{54}\log\dfrac{8}{5}$ となります。