xyz 空間において連立不等式

$$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1,\ x^2+y^2+z^2-2xy-1 \geqq 0$$

を満たす点 (x, y, z) 全体からなる立体の体積を求めよ。

< '07 北海道大 >

【戦略】

「この立体がどんな図形になるのか」を想像しても手は動きません。

まずは目をつぶって切りましょう。

一般に不等式で表された図形を切るときは

「 $x=k$ または $y=k$ または $z=k$ 」

のいずれかで切ります。

どれを選ぶかは「その後の切り口が簡単になるように切る」というのが判断基準です。

切り口の面積が簡単になるように切るための目の付け所は

①：次数が高い文字で切る
②：登場回数が多い文字で切る
③：対称性があれば対称性に注目する

です。

①，② については「 ○ $=k$ で切る」ということはその後「 ○ は定数扱い」ということですから次数が高い文字や，登場回数が多い文字が定数になってくれるとありがたいということです。

③ についてはこのトピックスに限ったことではありません。

今回の問題は x と y に対称性がありますから，対称性を崩さないよう，対称性の外にいる $z=k$ で切ります。

【解答】

この立体は $\begin{cases} 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq 1 \\ 0 \leqq z \leqq 1 \\ (x-y)^2 \geqq 1-z^2 \end{cases}$ を満たす点 (x, y, z) の集合である。

この立体を平面 $z=k$ で切ったときの切り口は

$$\begin{cases} 0 \leqq k \leqq 1 \\ 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq 1 \\ (x-y)^2 \geqq 1-k^2 \end{cases},\ \text{すなわち} \begin{cases} 0 \leqq k \leqq 1 \\ 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq 1 \\ |x-y| \geqq \sqrt{1-k^2} \end{cases}$$

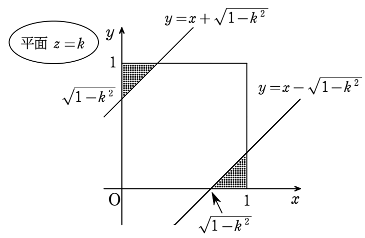
を満たす点 (x, y, k) の集合である。

ここで，$|x-y| \geqq \sqrt{1-k^2} \iff \begin{cases} y \geqq x+\sqrt{1-k^2} & (y \geqq x \text{ のとき}) \\ y \leqq x-\sqrt{1-k^2} & (y \leqq x \text{ のとき}) \end{cases}$

であることに注意してこの切り口を図示すると (図 1) の斜線部となる。

ゆえに $z=k$ $(0 \leqq k \leqq 1)$ で切った切り口の面積 $S(k)$ は 1 辺 $1-\sqrt{1-k^2}$ の正方形の面積であるので

$$\begin{aligned} S(k) &= (1-\sqrt{1-k^2})^2 \\ &= 2-k^2-2\sqrt{1-k^2} \end{aligned}$$



(図 1)

求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 S(k)\,dk \\ &= \int_0^1 (2-k^2)\,dk - 2\int_0^1 \sqrt{1-k^2}\,dk \end{aligned}$$

半径 1 の円 (上半分) を表す関数です

$$\int_0^1 (2-k^2)\,dk = \left[2k-\frac{1}{3}k^3\right]_0^1 = \frac{5}{3}$$

$$2\int_0^1 \sqrt{1-k^2}\,dk = 2\cdot\left(\text{半径 1 の円の面積の } \frac{1}{4}\right) = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

よって，$V = \dfrac{5}{3}-\dfrac{\pi}{2}$ …答

【総括】

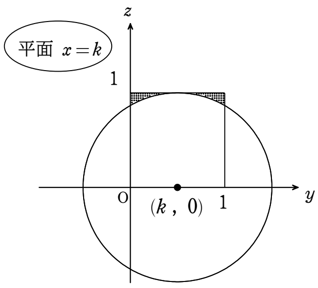
ちなみに例えば平面 $x=k$ で切ってみると，切り口は $\begin{cases} 0 \leqq k \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq 1 \\ 0 \leqq z \leqq 1 \\ (k-y)^2 \geqq 1-z^2 \end{cases}$

となります。

すなわち $\begin{cases} 0 \leqq k \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq 1 \\ 0 \leqq z \leqq 1 \\ (y-k)^2+z^2 \geqq 1 \end{cases}$ を満たす点 (k, y, z) の集合が切り口となり，

切り口に円が絡んできます。

（右図参照）



こうなってくると切り口の断面積を求めるのに「角度 θ 」を導入しなければなりません。

避けられる苦労なら避けた方が無難です。