$a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ は実数で，$b_1 \geqq b_2 \geqq b_3 \geqq b_4 > 0$ とする。$\sum_{k=1}^{4} a_k b_k > 0$ かつ $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqq 0$（$n=1, 2, 3$）ならば，$\sum_{k=1}^{4} a_k > 0$ であることを示せ。

＜ '80 お茶の水女子大 ＞

【戦略】

与えられた条件を具体的に書き下すと

$$\begin{cases} a_1 b_1 \leqq 0 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 \leqq 0 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \leqq 0 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 > 0 \end{cases}$$

となり，ここから $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > 0$ という結論を目指すことになりますが，この条件から $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ まで辿り着くのは茨の道でしょう。

たいていの人は与えられた条件をどう活用してよいのか迷い，持て余してしまう可能性が高いと思います。

$b_1 \sim b_4$ までは正という条件がありますが，$a_1 \sim a_4$ までは条件がないので，負であることも十分に考えられます。

そこで思いつきたいのは

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ を $b_1 \sim b_4$ で表す

ということ，すなわち

$a_1 \sim a_4$ を消去する

という方針です。
（条件をもっていない文字を消去し，条件をもっている文字で表す）

とは言え，不等式から文字を消去するのは至難の業です。

そこで覚えておきたいテクニックの 1 つとして

「名前を付けて等式化」

という考え方があります。等式から文字を消去することは容易いですから。

【解答】

$b_1 \geqq b_2 \geqq b_3 \geqq b_4 > 0$ …①

与えられた条件は

$$\begin{cases} a_1 b_1 \leqq 0 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 \leqq 0 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \leqq 0 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 > 0 \end{cases}$$

今，$\begin{cases} x_1 = a_1 b_1 \\ x_2 = a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ x_3 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ x_4 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 \end{cases}$ とおくと，与えられた条件から

$x_1 \leqq 0$， $x_2 \leqq 0$， $x_3 \leqq 0$， $x_4 > 0$ … ②

このように
名前を付ければ

文字を消去することが
容易になります。

このとき

$a_1 = \dfrac{x_1}{b_1}$

$x_2 - x_1 = a_2 b_2$ より，$a_2 = \dfrac{x_2 - x_1}{b_2}$

$x_3 - x_2 = a_3 b_3$ より，$a_3 = \dfrac{x_3 - x_2}{b_3}$

$x_4 - x_3 = a_4 b_4$ より，$a_4 = \dfrac{x_4 - x_3}{b_4}$

ゆえに，
$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= \frac{x_1}{b_1} + \frac{x_2 - x_1}{b_2} + \frac{x_3 - x_2}{b_3} + \frac{x_4 - x_3}{b_4} \\ &= \frac{b_2 - b_1}{b_1 b_2} x_1 + \frac{b_3 - b_2}{b_2 b_3} x_2 + \frac{b_4 - b_3}{b_3 b_4} x_3 + \frac{x_4}{b_4} \end{aligned}$$

①，② より，$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > 0$ が成り立ち，題意は示された。

【総括】

不等式から文字を消したいときは素晴らしい名前をつけてあげてください。

【ウンチク】

本問の背景には「アーベルの総和公式」

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{j=1}^{n-1}\left\{\sum_{k=1}^{j} a_k (b_j - b_{j+1})\right\} + \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) b_n$$

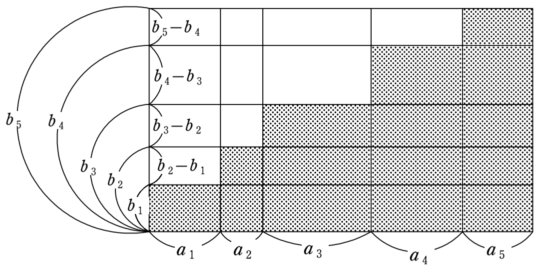
というものがあります。

一見複雑に見えますが，書き下してみると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= a_1(b_1-b_2)\\ &\quad +(a_1+a_2)(b_2-b_3)\\ &\quad +(a_1+a_2+a_3)(b_3-b_4)\\ &\qquad\qquad \vdots\\ &\quad +(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})(b_{n-1}-b_n)\\ &\quad +(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n)\,b_n\end{aligned}$$

となります。

図形的に捉えると，例えば $n=5$ のとき



この打点部の面積について

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4+a_5b_5$$

です。

一方，この面積は長方形の面積から打点部以外の部分の面積を除いたものですから

$$\begin{aligned}&(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)\,b_5\\ &\quad -\{a_1(b_2-b_1)+(a_1+a_2)(b_3-b_2)+(a_1+a_2+a_3)(b_4-b_3)+(a_1+a_2+a_3+a_4)(b_5-b_4)\}\\ &=a_1(b_1-b_2)+(a_1+a_2)(b_2-b_3)+(a_1+a_2+a_3)(b_3-b_4)+(a_1+a_2+a_3+a_4)(b_4-b_5)\\ &\qquad +(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)\,b_5\end{aligned}$$

であり，両者は一致します。

本問においてですが，このアーベルの総和公式より

$$\begin{aligned}&p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3+p_4q_4\\ &=p_1(q_1-q_2)+(p_1+p_2)(q_2-q_3)+(p_1+p_2+p_3)(q_3-q_4)+(p_1+p_2+p_3+p_4)\,q_4\end{aligned}$$

$p_k=a_kb_k$，$q_k=\dfrac{1}{b_k}$ とすると，上の式は

$$\begin{aligned}a_1+a_2+a_3+a_4&=a_1b_1\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_2}\right)+(a_1b_1+a_2b_2)\left(\frac{1}{b_2}-\frac{1}{b_3}\right)\\ &\quad +(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\left(\frac{1}{b_3}-\frac{1}{b_4}\right)+\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4}{b_4}\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_ib_i = x_k$ とおくと

$$a_1+a_2+a_3+a_4=x_1\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_2}\right)+x_2\left(\frac{1}{b_2}-\frac{1}{b_3}\right)+x_3\left(\frac{1}{b_3}-\frac{1}{b_4}\right)+\frac{x_4}{b_4}$$

となり，本問の結果に合流します。

あくまでウンチクレベルだと思ってくれて構いません。