不等式を文字を消去する技巧【名前をつけて等式化】

実数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 が

$$a_1-a_2>a_2-a_3>a_3-a_4>a_4-a_5>a_5-a_6>a_6-a_1$$

を満たしているとき，a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 のうち，最大の実数はどれか。

＜ ’98 鹿児島経済大 ＞

【戦略】

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 を数列と見ると，与えられた条件は見にくいです。

$$a_2-a_1<a_3-a_2<a_4-a_3<a_5-a_4<a_6-a_5<a_1-a_6$$

と変形してやることで「階差数列」という意味づけができるでしょう。

さらに，明確にするにあたり，「名前を付けて等式化」します。

この階差数列を b_1, b_2, $\cdots$, b_6 と名前をつけてやると，

$$b_1<b_2<\cdots<b_6$$

というのはすぐさま見えるはずです。

そしてここで少し経験が必要なものの見方をするのですが，

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とするとき

$$a_n<a_{n+1} \iff b_n>0$$
$$a_n>a_{n+1} \iff b_n<0$$

です。

$f(x)$ の増減を調べるのに $f'(x)$ の符号を調べるのと同じ感覚で，数列 $\{a_n\}$ の増減を調べたかったら階差数列の符号を調べればよいですね。

今，b_1, b_2, $\cdots$, b_6 の符号を調べることで，a_1, a_2, $\cdots$ の増減を調べ，最大を求めることにする作戦で倒していきます。

名前をつけて等式化した恩恵で

$$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6=0$$

と，b だけの式（a を消去）を Get できます。

これは「全部正」や「全部負」ということがない，すなわちどこかで符号チェンジが起こっていることを意味します。

【解答】

与えられた条件を

$$a_2-a_1<a_3-a_2<a_4-a_3<a_5-a_4<a_6-a_5<a_1-a_6$$

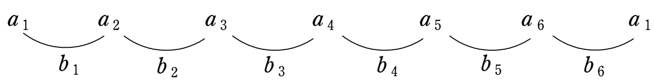
と見て考える。

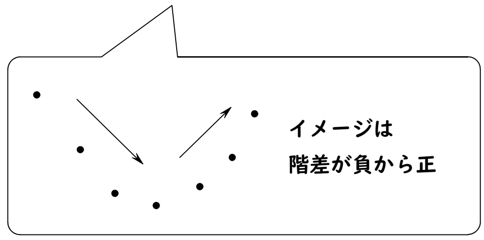
$$\begin{cases} a_2-a_1=b_1 \\ a_3-a_2=b_2 \\ a_4-a_3=b_3 \\ a_5-a_4=b_4 \\ a_6-a_5=b_5 \\ a_1-a_6=b_6 \end{cases} \text{とおくと，} \begin{cases} b_1<b_2<b_3<b_4<b_5<b_6 & \cdots ① \\ b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①，② を考えると，$b_1 \sim b_6$ が全て同符号にはなり得ないので，

$$\begin{cases} b_1 \leqq 0 \leqq b_2<b_3<b_4<b_5<b_6 \\ b_1<b_2 \leqq 0 \leqq b_3<b_4<b_5<b_6 \\ b_1<b_2<b_3 \leqq 0 \leqq b_4<b_5<b_6 \\ b_1<b_2<b_3<b_4 \leqq 0 \leqq b_5<b_6 \\ b_1<b_2<b_3<b_4<b_5 \leqq 0 \leqq b_6 \end{cases} \quad \text{のいずれかが成立する。}$$

ただし，どの場合でも等号は同時には成立しない。





いずれの場合でも a_1 が最大となる … 答

【総括】

試験場で再現できるかどうかという再現性がある考え方ではないかもしれません。

何でもかんでも名前をつければいいというわけでもありませんが，素晴らしい名前をつけると本問のようにそれが劇的に効いてくることもあることは知っておいて損はないでしょう。