どのような負でない 2 つの整数 m と n をもちいても $x=3m+5n$ とは表すことができない正の整数 x をすべて求めよ。

＜ '00 大阪大 ＞

【戦略】

実験して手を動かしてみると，1，2，4，7 は無理そうだと分かると思います。

逆に 8 以上は全て表せることもおぼろげながら見えると思います。
（もちろん睨めっこではなく，手を動かしながら探していればの話です。）

$1=$**無理**
$2=$**無理**
$3=3\cdot1$
$4=$**無理**
$5=5\cdot1$
$6=3\cdot2$
$7=$**無理**
$8=3\cdot1+5\cdot1$
$9=3\cdot3$
$10=5\cdot2$
$11=3\cdot2+5\cdot1$
$12=3\cdot4$
$13=3\cdot1+5\cdot2$
$14=3\cdot3+5\cdot1$
$15=5\cdot3$
$16=3\cdot2+5\cdot2$
$17=3\cdot4+5\cdot1$

なんとなく見えてきましたかね。

$1=$**無理**
$2=$**無理**
$3=3\cdot1$
$4=$**無理**
$5=5\cdot1$
$6=3\cdot2$
$7=$**無理**
$8=3\cdot1+5\cdot1$
$9=3\cdot3$
$10=5\cdot2$
$11=3\cdot2+5\cdot1$
$12=3\cdot4$
$13=3\cdot1+5\cdot2$
$14=3\cdot3+5\cdot1$
$15=5\cdot3$
$16=3\cdot2+5\cdot2$
$17=3\cdot4+5\cdot1$

というように，$3m+5\cdot0$ ，$3m+5\cdot1$，$3m+5\cdot2$ というタイプが周期 3 で現れていることに気づくと思います。

つまり，n については，0，1，2 で考えれば十分だと言えるでしょう。

ただ，$n=0$，1，2 で，1，2，4，7 以外の数は表せることは言えても 1，2，4，7 が表せないことをどう示すかが問題です。

$n=0$，1，2 のときは無理だと分かったのですから，$n\geqq3$ でも無理だと言えれば OK です。

そしてそれは当たり前です。

$n\geqq3$ なら $x\geqq15$ なのですから。

【解答】

$n=0$ とすると，$x=3m$ より，$x=0$，3，6，9，… は全て表せる。

$n=1$ とすると，$x=3m+5$ より，$x=5$，8，11，14，… は全て表せる。

$n=2$ とすると，$x=3m+10$ より，$x=10$，13，16，… は全て表せる。

$n\geqq3$ とすると，$x\geqq15$

以上から，

$x=1$，2，4，7 は $3m+5n$（m，n は非負整数）の形で表せない。… 答

【総括】

実験から何を見出すかが大切です。

頭の中で考えることも大切ですが，手を動かすことでキッカケを掴もうとすることも大事な戦略です。

【参考】

以下，x ではなく c というアルファベットにします。

負の数も認めてよいのであれば，$3m+5n=c$ を満たす整数 m，n の組は無数にあります。

つまり，任意の整数 c に対して $3m+5n=c$ を満たす整数の組 $(m,\ n)$ は存在します。

証明はするまでもないかもしれません。
$(m,\ n)=(2c,\ -c)$ と存在するでしょう。

【発展】

一般に，a，b を 0 でない整数として，a，b の最大公約数を G としたとき

ベズーの補題
$ax+by=c$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ が存在する $\Leftrightarrow$ c は G の倍数

ということが言えます。

＜証明 STEP 1＞ $c=1$ のときを示す。

まず $c=1$ のときである

$ax+by=1$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ が存在する $\Leftrightarrow$ a，b は互いに素

という主張を示す。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

$\Longrightarrow$ の証明

$ax+by=1$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ が存在するとき，a，b が互いに素でないと仮定すると，

$$\begin{cases} a=G\alpha \\ b=G\beta \end{cases} (G\geqq 2,\ \alpha,\ \beta \text{ は互いに素な整数})$$

と表せる。

このとき，$G\alpha x+G\beta y=1$，すなわち $G(\alpha x+\beta y)=1$

$G\geqq 2$，$\alpha x+\beta y$ が整数であるということから，左辺は 1 にならず矛盾する。

ゆえに，$ax+by=1$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ が存在するとき，a，b は互いに素である。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

$\Longleftarrow$ の証明

a，b が互いに素であるとき，
$$a,\ 2a,\ 3a,\ \cdots,\ (b-1)a$$
という $b-1$ 個の整数を b で割った余りは全て異なる。…(☆)

ことを示す。

$ia\equiv ja\pmod b$ $(1\leqq i<j\leqq b-1)$ となる i，j が存在すると仮定する。

このとき，$(j-i)a\equiv 0\pmod b$

$(j-i)a$ は b の倍数だが，a，b は互いに素より $j-i$ が b の倍数。

$1\leqq i<j\leqq b-1$ であることから，i と j の幅 $j-i$ は $0<j-i\leqq b-2$

この範囲にある b の倍数は 0 しかないため，$j-i=0$ となり，i，j が異なるということに矛盾する。

ゆえに，(☆) が示された。

(☆) より，a，$2a$，$3a$，…，$(b-1)a$ という $b-1$ 個の整数を b で割った余りは，1，2，3，…，$b-1$ のどれかと 1 対 1 対応することになる。

ゆえに，$ma\equiv 1\pmod b$ となる整数 m が存在する。

これは，$ma=bq+1$ となる整数 q が存在することを意味する。

以上から，$ma-bq=1$，すなわち $am+b(-q)=1$ となる整数 m，q が存在することが言えた。

これは，$ax+by=1$ を満たす整数の組として $(x,\ y)=(m,\ -q)$ が存在するということを意味し，$\Longleftarrow$ の証明ができたことになる。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

＜証明 STEP 2＞ 本題（ベズーの定理）の証明

$\Longrightarrow$ の証明

a，b の最大公約数を G とすると $\begin{cases} a=G\alpha \\ b=G\beta \end{cases}$ (α，β は互いに素な整数) と表せる。

$ax+by=c$ が整数解 $(x,\ y)=(M,\ N)$ をもつとき

$aM+bN=c$ であり，$c=G\alpha M+G\beta N=G(\alpha M+\beta N)$ であるため
c は G の倍数である。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

$\Longleftarrow$ の証明

a，b の最大公約数を G としていることから
$$a=G\alpha,\ b=G\beta\ (\alpha,\ \beta \text{ は互いに素な整数})$$
と表せる。

c が G の倍数であるとき，$c=G\gamma$ (γ は整数) と表せる。

さて，今 α，β が互いに素であることから，STEP 1 で示したことを用いると

$$\alpha X+\beta Y=1 \text{ を満たす整数の組 } (X,\ Y) \text{ が存在する。}$$

両辺 $G\gamma$ 倍すれば，$G\alpha\gamma X+G\beta\gamma Y=G\gamma$

これより，$a(\gamma X)+b(\gamma Y)=c$ という等式を得る。

これは，$ax+by=c$ を満たす整数解として $(x,\ y)=(\gamma X,\ \gamma Y)$ が存在するということを意味し，$\Longleftarrow$ が証明されたことになる。