α は $\cos\alpha=\tan\alpha$ ，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ をみたす実数とし，

$$f_1(x)=\cos x-2\tan x+\sin x$$
$$f_2(x)=\tan x-2\cos x+\sin x$$

とおく。

(1) $f_1(x)=0$ は $0<x<\alpha$ においてただ 1 つの実数解をもつことを示せ。

(2) $f_2(x)=0$ は $\alpha<x<\dfrac{\pi}{4}$ においてただ 1 つの実数解をもつことを示せ。

(3) 次の性質をみたす実数 θ は，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ にちょうど 2 つ存在することを示せ。

「$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ を適当に並びかえたものが等差数列となる」

＜ '03 札幌医科大 ＞

【戦略】～ 先に戦略の全体像から ～

全体を見ると，(3) の準備運動が (1)，(2) であることが分かります。

一般に，a，b，c がこの順で等差数列となるとき，$\dfrac{a+c}{2}=b$ ，すなわち $a+b=2b$ であることが言えます。

したがって，(3) で示すべき 2 つの θ とは (1)，(2) で存在を保証した θ たちであることが分かります。

(1) から 「真ん中が $\tan\theta$ 」となるような並びの等差数列は実現可能であることが言え，(2) から「真ん中が $\cos\theta$ 」となるような並びの等差数列も実現可能であることが言えます。

残るは「真ん中が $\sin\theta$ 」となるような並びが実現可能かどうかを検証することになりますが，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で $\begin{cases}\sin\theta<\cos\theta\\ \sin\theta<\tan\theta\end{cases}$ です。

（単位円を考えれば，$\sin\theta<\cos\theta$ は明らかですし，$\tan\theta-\sin\theta$ を計算すると，$\dfrac{\sin\theta\,(1-\cos\theta)}{\cos\theta}>0$ です。）

つまり，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で，$\sin\theta$ は最小なので，真ん中の項となることはあり得ません。

(1)，(2) について

基本的に微分法でグラフの概形的な部分をつかんで示せばよいです。

単調性と，区間の両端の値の符号を確認すれば

「存在」と「唯一性」

が言えます。

その際ですが，$f_1{}'(x)=\cdots=\dfrac{\sin^3x+\cos^3x-\sin x-2}{\cos^2x}$ となります。

いたずらに微分せず，$\dfrac{(0.**\cdots)+(0.**\cdots)-(2.**\cdots)}{\text{正}}<0$ とある意味ラフに符号を捉えたいところです。

$f_2{}'(x)$ についても同様に符号を即判定できるパーツを寄せ集めることを考えます。

【解答】

(1) $f_1{}'(x)=-\sin x-2\cdot\dfrac{1}{\cos^2x}+\cos x$

$$=\frac{-\sin x\,\cos^2x+\cos^3x-2}{\cos^2x}$$
$$=\frac{-\sin x\,(1-\sin^2x)+\cos^3x-2}{\cos^2x}$$
$$=\frac{\sin^3x+\cos^3x-\sin x-2}{\cos^2x}$$

ここで，$\sin^3x+\cos^3x<1$ であるため，両辺 $-\sin x-2$ を加えると

$\sin^3x+\cos^3x-\sin x-2<1-\sin x-2$

すなわち $\sin^3x+\cos^3x-\sin x-2<-1-\sin x<0$ が成り立つ。

ゆえに，$f_1{}'(x)$ の分母は正，分子は負であるため，$f_1{}'(x)<0$

これより，$0<x<\alpha$ で $f_1(x)$ は単調減少 … ①

また，$f_1(0)=1\,(\,>0\,)$ … ②

$$\begin{aligned}f_1(\alpha)&=\cos\alpha-2\tan\alpha+\sin\alpha\\&=(\cos\alpha-\tan\alpha)+\sin\alpha-\tan\alpha\\&=\sin\alpha-\tan\alpha\ (\because\ \text{条件}\ \cos\alpha=\tan\alpha)\\&=\sin\alpha-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\&=\frac{\sin\alpha\,(\cos\alpha-1)}{\cos\alpha}\end{aligned}$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}\left(<\dfrac{\pi}{2}\right)$ なので，$\begin{cases}\sin\alpha>0\\ \cos\alpha>0\\ \cos\alpha-1<0\end{cases}$ で，$f_1(\alpha)<0$ … ③

①，②，③ より，$f_1(x)=0$ は $0<x<\alpha$ の範囲でただ 1 つの実数解をもつ。

なお，(3) のために補足すると，$0<x<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で $f_1(x)$ は単調減少で，$f_1\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-2<0$ であるため，$0<x<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で $f_1(x)=0$ の解はただ一つであることも言える。… (*)

(2) $f_2{}'(x)=\dfrac{1}{\cos^2x}+2\sin x-\cos x$

$$=\frac{1-\cos^3x}{\cos^2x}+2\sin x$$

$0<\alpha<x<\dfrac{\pi}{4}$ で，$1-\cos^3x>0$，$2\sin x>0$ より，$f_2{}'(x)>0$

ゆえに，$\alpha<x<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で，$f_2(x)$ は単調増加 … ④

$$\begin{aligned}f_2(\alpha)&=\tan\alpha-2\cos\alpha+\sin\alpha\\&=(\tan\alpha-\cos\alpha)+(\sin\alpha-\cos\alpha)\\&=\sin\alpha-\cos\alpha\ (\ \because\ \text{条件}\ \cos\alpha=\tan\alpha\ )\\&<0\ \left(\because 0<\alpha<\frac{\pi}{4}\ \text{なので}\ \sin\alpha<\cos\alpha\right)\ \cdots⑤\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_2\left(\frac{\pi}{4}\right)&=1-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\\&=\frac{2-\sqrt{2}}{2}>0\ \cdots⑥\end{aligned}$$

④，⑤，⑥ より，$f_2(x)=0$ は $\alpha<x<\frac{\pi}{4}$ の範囲でただ 1 つの実数解をもつ。

なお，(3) のために補足すると，$0<x<\frac{\pi}{4}$ の範囲で $f_2(x)$ は単調増加で，$f_2(0)=-2<0$ であるため，$0<x<\frac{\pi}{4}$ の範囲で $f_2(x)=0$ の解はただ一つであることも言える。… (**)

(3) (1) より，$f_1(\theta)=0$ ， すなわち $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{2}=\tan\theta$ を満たす θ が $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ の範囲にただ一つ存在し，それを θ_1 とする。

(＊) による

また，(2) より，$f_2(\theta)=0$，すなわち $\dfrac{\sin\theta+\tan\theta}{2}=\cos\theta$ を満たす θ が $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ の範囲にただ一つ存在し，それを θ_2 とする。

(**) による

$\sin\theta$，$\tan\theta$，$\cos\theta$，または $\cos\theta$，$\tan\theta$，$\sin\theta$ がこの順で等差数列となるような θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$ は

$$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}=\tan\theta$$

を満たすような θ であり，$0<\theta<\frac{\pi}{4}$ の範囲でそのような θ は $\theta=\theta_1$ というただ一つである。

$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$，または $\tan\theta$，$\cos\theta$，$\sin\theta$ がこの順で等差数列となるような θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$ は

$$\frac{\sin\theta+\tan\theta}{2}=\cos\theta$$

を満たすような θ であり，$0<\theta<\frac{\pi}{4}$ の範囲でそのような θ は $\theta=\theta_2$ というただ一つである。

また，$0<\theta<\frac{\pi}{4}$ の範囲で
$\cos\theta$，$\sin\theta$，$\tan\theta$ ，または $\tan\theta$，$\sin\theta$，$\cos\theta$ がこの順で等差数列となることはあり得ない。

なぜなら，$0<\theta<\frac{\pi}{4}$ の範囲において，$\begin{cases}\sin\theta<\cos\theta\\ \sin\theta<\tan\theta\end{cases}$ であるため

$\sin\theta$ が真ん中の項となることはあり得ないからである。

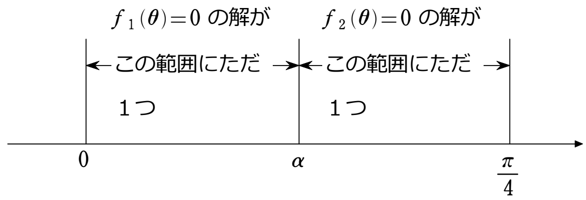
以上から，題意は示された。

【総括】

(1)，(2) をどのように活用するかについては迷わずに「等差中項の関係式」をインスピレーションして進めていきたいところです。

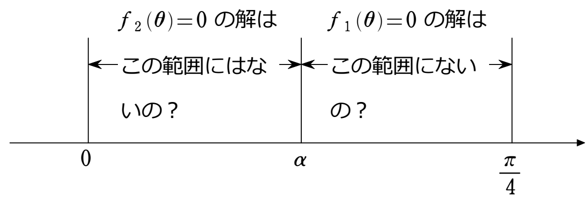
解答中の (＊)，(**) について一言振り返っておきます。

出題者は，恐らくより正確な範囲で θ_1，θ_2 が存在する範囲を出させようと



ということを証明させたのでしょう。

ただ，$0<\theta<\frac{\pi}{4}$ の範囲で，今回の性質をもつ θ が 2 つであることを言おうと思った場合



という疑問を潰しておく必要が出てきます。

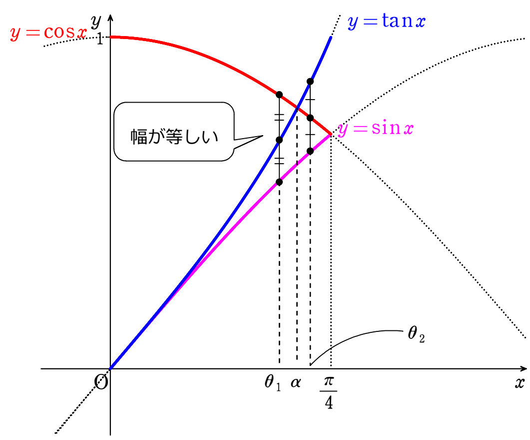
そういった意味で，今回の設定は「範囲的な意味ではジャマ」で

$f_1(x)=0$ の実数解は $0<x<\frac{\pi}{4}$ の範囲にただ一つであることを示せ。

$f_2(x)=0$ の実数解は $0<x<\frac{\pi}{4}$ の範囲にただ一つであることを示せ。

の方が余計な心配する必要はなかったと思います。

なお



のように視覚化すれば確かに α を境に $0<x<\alpha$，$\alpha<x<\frac{\pi}{4}$ で一つずつ題意の θ が存在することが分かりますし，解答中の $\sin x$ が真ん中の項とならないことも分かります。