ポリアの壺

3 個の赤球と 2 個の白球が入った袋がある。この袋から球を一つ無作為に取り出してその色を記録し，取り出した球を袋に戻すのと同時にそれと同じ球を一つ袋に加えるという操作を繰り返す。

動点 P は，原点を出発点として，取り出した球が赤の場合には x 軸の正の方向に 1 進み，白の場合には x 軸負の方向に 1 進むものとする。

n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　n 回目の試行で赤球を取り出す確率を求めよ。

(2)　$2n$ 回目の試行後に動点 P が原点にいる確率を求めよ。

＜ '07 産業医科大 穴埋め→記述式に改変 ＞

【戦略】

(1)　**袋の中が $\begin{cases} \text{赤球 } a \text{ 個} \\ \text{白球 } b \text{ 個} \end{cases}$ の状態を $(a\,,\,b)$ とします。**

実験の結果，$(3\,,\,2)$ の状態からスタートすれば，赤球をとる確率は何回目であっても $\dfrac{3}{5}$ であると分かります。

つまり，「ある起点」から n 回後の抽出における赤球の出やすさは

起点の状態の袋の中の状態のみに依存する

ということが予想されます。

$(a\,,\,b)$ の状態からスタートすれば，その n 回後に赤球が出てくる確率は n に依存しない $\dfrac{a}{a+b}$ であることが予想されるわけです。

その予想を帰納法で裏付ければよいわけですが，その際

「最初の一手で場合分け」

をします。

(2)　**最初の状態から $2n$ 回取り出した際の記録の内訳が $\begin{cases} \text{赤球 } n \text{ 回} \\ \text{白球 } n \text{ 回} \end{cases}$ であればよいわけです。**

例えば $n=3$ ぐらいのときで考えてみます。

赤，赤，白，赤，白，白 と出るときの確率を考えてみます。

赤球の個数は 3 → 4 → 5 → 5 → 6 → 6
白球の個数は 2 → 2 → 2 → 3 → 3 → 4
5 個　6 個　7 個　8 個　9 個　10 個

となるため， $\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{6}\times\dfrac{2}{7}\times\dfrac{5}{8}\times\dfrac{3}{9}\times\dfrac{4}{10}$ **です。**

白，赤，白，赤，赤，白 と出るときの確率を考えてみます。

赤球の個数は 3 → 3 → 4 → 4 → 5 → 6
白球の個数は 2 → 3 → 3 → 4 → 4 → 4
5 個　6 個　7 個　8 個　9 個　10 個

となるため， $\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{6}\times\dfrac{3}{7}\times\dfrac{4}{8}\times\dfrac{5}{9}\times\dfrac{4}{10}$ **です。**

こうしてみると，結局 $\dfrac{(3\cdot4\cdot5)\cdot(2\cdot3\cdot4)}{5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}$ と，

$$\frac{(\text{赤球の個数変化に伴うとり方})\cdot(\text{白球の個数変化に伴うとり方})}{\text{全ての玉の個数変化に伴うとり方}}$$

で考えればよいことが分かります。

これを一般化してまとめます。

【解答】

(1)　袋の中に赤玉が a 個，白玉が b 個ある状態を $(a\,,\,b)$ と表す。

＜ 1 回目に赤球をとる確率について＞

$(3\,,\,2)$ の状態から赤球をとる確率なので，$\dfrac{3}{5}$

＜ 2 回目に赤球をとる確率について＞

1 回目に赤をとり，$(4\,,\,2)$ の状態になってから赤球をとる
または
1 回目に白をとり，$(3\,,\,3)$ の状態になってから赤球をとる

のいずれかが起こる確率を求めればよく

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{6}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$$

$n=1\,,\,2\,,\,\cdots$ に対して

$(a\,,\,b)$ の状態からスタートして n 回目に赤球を取り出す確率が $\dfrac{a}{a+b}$ $\cdots(*)$

であることが予想されるので，これを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき 1 回目に赤を取り出す確率は $\dfrac{a}{a+b}$ で，$(*)$ は成立する。

(ii)　$n=k$ $(k=1\,,\,2\,,\,\cdots)$ のとき

$(a\,,\,b)$ の状態からスタートして k 回目に赤球を取り出す確率が $\dfrac{a}{a+b}$ と仮定する。

(ii−1)　1 回目に赤球をとるとき，その確率は $\dfrac{a}{a+b}$

袋の中が $(a+1\,,\,b)$ の状態からスタートして残り k 回の操作後に赤球をとる確率は仮定から $\dfrac{a+1}{(a+1)+b}$

(ii−2)　1 回目に白球をとるとき，その確率は $\dfrac{b}{a+b}$

袋の中が $(a\,,\,b+1)$ の状態からスタートして残り k 回の操作後に赤球をとる確率は仮定から $\dfrac{a}{a+(b+1)}$

(ii−1)，(ii−2) から，(a, b) の状態からスタートして $k+1$ 回の操作後に赤球をとる確率は

$$\begin{aligned}\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+1}{a+b+1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b+1}&=\frac{a^2+a+ab}{(a+b)(a+b+1)}\\&=\frac{a(a+b+1)}{(a+b)(a+b+1)}\\&=\frac{a}{a+b}\end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する。

(i)，(ii) から，$n=1, 2, \cdots$ に対して $(*)$ は正しく，本問は

$a=3$，$b=2$ のときを考えればよいため，求める確率は $\dfrac{3}{5}$ …答

(2)　赤球と白球を n 回ずつ取り出せばよい。

$2n$ 回目の球を取り出した段階で，$2n+1$ 回目の操作に向けた球の追加は一旦ストップすると考えると

赤球は 3 個からスタートし，n 回取り出すため，$n+2$ 個まで増える。

白球は 2 個からスタートし，n 回取り出すため，$n+1$ 個まで増える。

袋の中の玉の総数は 5 個からスタートし，$2n+4$ 個まで増える。

よって，求める確率は

$${}_{2n}\mathrm{C}_n\times\frac{\{3\cdot4\cdot\cdots\cdot(n+2)\}\{2\cdot3\cdot\cdots\cdot(n+1)\}}{5\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n+4)}$$

$$=\frac{(2n)!}{(n!)(2n-n)!}\times\frac{\dfrac{(n+2)!}{2!}\cdot(n+1)!}{\dfrac{(2n+4)!}{4!}}$$

$$=\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}\times\frac{12(n+2)!(n+1)!}{(2n+4)!}$$

$$=\frac{(2n)!}{(2n+4)!}\cdot\frac{(n+2)!}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}\cdot12$$

$$=\frac{12(n+2)(n+1)(n+1)}{(2n+4)(2n+3)(2n+2)(2n+1)}$$

$$=\frac{12(n+2)(n+1)(n+1)}{4(n+2)(2n+3)(n+1)(2n+1)}$$

$$=\frac{3(n+1)}{(2n+3)(2n+1)}\ \cdots\text{答}$$

【総括】

本問は「ポリアの壺」と呼ばれる有名問題です。

取り出した球と同色の玉を追加していくというルールで，袋の中身が変化していくにもかかわらず，スタート時点から見た未来において赤球と白球を取り出す確率は変化しないという興味深い話です。

(1) は初見ではキツイものがあります。

具体的なまま実験して，

1 回目に赤球を取り出す確率は $\dfrac{3}{5}$

2 回目に赤球を取り出す確率は $\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{4}{6}+\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{6}=\dfrac{18}{30}=\dfrac{3}{5}$

と考えても，n 回後の操作で $\dfrac{3}{5}$ と予想はできますが，

「袋の初期状態にのみ依存する」

という部分（ $(3, 2)\to\dfrac{3}{3+2}$ ）を看破しないと，その後の帰納法でアタフタするでしょう。

多くの人は「k 回後の操作において赤球を取り出す確率が $\dfrac{3}{5}$」と仮定するでしょう。

最初に取り出す 1 個が赤球のとき，袋の中身は $(4, 2)$ となっています。

あるいは最初に白球を取り出した後は，袋の中身は $(3, 3)$ となります。

ここから k 回後の操作において赤球を取り出す確率で困ってしまいます。

（仮定は $(3, 2)$ **の状態から k 回後の操作**で赤球をとる確率が $\dfrac{3}{5}$ と仮定しています。）

つまり，袋の状態が (a, b) の状態からスタートして，k 回後の操作における赤球を取り出す確率が $\dfrac{a}{a+b}$ というように「袋の中身の状態まで含めて仮定」しないと状態の変化に対応できないのです。

袋の中身まで含めて仮定すれば，それはそれ以降の議論で使ってよい味方になるわけです。

(2) も下手なことを考えると混乱します。

「その場力」が必要なタイプで，難問です。

下手をすると，(1) に引きずられて，各回の操作が独立であるとしてしまい ${}_{2n}\mathrm{C}_n\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ という誤答になりかねません。

【戦略】でとったように「モデルケース」を考えてみて要領をつかみ，それを一般化する力が必要です。