ベクトルの論証問題【隠れた条件と 1 次独立性】

$\triangle$ABC に対し，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ として，

$$\vec{p}=|\vec{a}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{c}+|\vec{c}|\vec{a}$$

によってベクトル $\vec{p}$ を定めるとき，次の問に答えよ。

(1) $\vec{p}=\vec{0}$ は $\triangle$ABC が正三角形であるための必要十分条件であることを証明せよ。

(2) $\vec{p}=\vec{a}$ かつ $|\vec{p}|=4$ のとき，$\cos\angle\mathrm{ABC}$ の値を求めよ。

＜ ’16 東京海洋大 ＞

【戦略】

(1) **与えられた $\vec{p}$ は巡回性をもったキレイな設定です。**

$$\triangle\mathrm{ABC}\text{ が正三角形} \Longrightarrow \vec{p}=\vec{0}$$

については問題ありません。

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=k$ **とでもおけば**

$$\begin{aligned}\vec{p}&=k\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\\&=\vec{0}\end{aligned}$$

となります。

一方，$\vec{p}=\vec{0} \Longrightarrow \triangle$ABC が正三角形 であることの証明についても考えます。

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ **であることを用いれば，1 文字分消去できるわけです。**

例えば，$\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$ というように，$\vec{c}$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せるわけです。

つまり，$\vec{p}=\bigcirc\vec{a}+\square\vec{b}$ の形に帰着できるわけです。

$\vec{a}$，$\vec{b}$ という 2 本は互いに平行でなく，零ベクトルでもありません。
（つまり 1 次独立です。）

ゆえに，$\vec{p}=\vec{0}$ のとき，$\bigcirc\vec{a}+\square\vec{b}=\vec{0}$ で，1 次独立性から

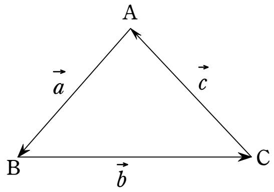
$$\begin{cases}\bigcirc=0\\ \square=0\end{cases}$$

と結んでいくのがもくろみです。

この辺りで気が付くかもしれませんが，今の議論は一気に同値変形として片付くので，【解答】ではスマートに記述します。

(2) **$\vec{p}=\vec{a}$ のとき，$\bigcirc\vec{a}+\square\vec{b}=\vec{a}$ ですから，もくろみ的には (1) と同じく係数比較で倒せるはずです。**

【解答】



$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ であり，$\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$ であることから

$$\begin{aligned}\vec{p}&=|\vec{a}|\vec{b}+|\vec{c}|\vec{a}-|\vec{b}|\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\\&=(|\vec{c}|-|\vec{b}|)\,\vec{a}+(|\vec{a}|-|\vec{b}|)\,\vec{b}\end{aligned}$$

(1) $\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立なので

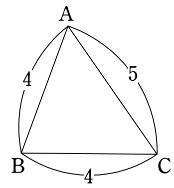
$$\begin{aligned}\vec{p}=\vec{0} &\iff (|\vec{c}|-|\vec{b}|)\,\vec{a}+(|\vec{a}|-|\vec{b}|)\,\vec{b}=\vec{0}\\&\iff \begin{cases}|\vec{c}|-|\vec{b}|=0\\|\vec{a}|-|\vec{b}|=0\end{cases}\\&\iff |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|\end{aligned}$$

であり，$\vec{p}=\vec{0}$ であることは $\triangle$ABC が正三角形であるための必要十分条件である。

(2) $\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立なので

$$\begin{aligned}\vec{p}=\vec{a} &\iff (|\vec{c}|-|\vec{b}|)\,\vec{a}+(|\vec{a}|-|\vec{b}|)\,\vec{b}=\vec{a}\\&\iff \begin{cases}|\vec{c}|-|\vec{b}|=1\\|\vec{a}|-|\vec{b}|=0\end{cases}\\&\iff \begin{cases}|\vec{c}|=|\vec{b}|+1\\|\vec{b}|=|\vec{a}|\end{cases}\cdots(*)\end{aligned}$$

条件より，$|\vec{a}|=|\vec{p}|=4$ であるため，$(*)$ より，$|\vec{b}|=4$，$|\vec{c}|=5$



ゆえに，

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{ABC}&=\frac{4^2+4^2-5^2}{2\cdot4\cdot4}\\&=\frac{7}{32}\ \cdots 答\end{aligned}$$

【総括】

案外 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ という隠れた条件に気が付かずに右往左往してしまう人も出てくると思います。

平面ベクトルの話では「1 つの始点，2 つの基底」という言葉があるように 2 本の主役ベクトル（基底）で表しに行くという姿勢がもてたかどうかです。

その気持ちがあれば，「3 本もいらねぇ」という文字消去の方向性を探りにいくことになり，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ に辿り着きやすくなるでしょう。