$\sqrt{n}$ の小数部分の評価

正の整数 n の正の平方根 $\sqrt{n}$ は整数ではなく，それを 10 進法で表すと，小数第 1 位は 0 であり，第 2 位は 0 以外の数であるとする。

(1) このような n の中で最小のものを求めよ。

(2) このような n を小さいものから順に並べたときに 10 番目にくるものを求めよ。

＜ '19 名古屋大 ＞

【戦略】

とりあえず与えられた条件を翻訳していくと

$$0.01 \leqq (\sqrt{n} \text{ の小数部分}) < 0.1$$

ということになります。

もちろん，$\sqrt{n}$ の整数部分は $[\sqrt{n}\,]$ ですから，

$$[\sqrt{n}\,]+\frac{1}{100} \leqq \sqrt{n} < [\sqrt{n}\,]+\frac{1}{10}$$

を Get し，$\sqrt{\quad}$ を外すために 2 乗して

$$[\sqrt{n}\,]^2+\frac{1}{50}[\sqrt{n}\,]+\frac{1}{10000} \leqq n < [\sqrt{n}\,]^2+\frac{1}{5}[\sqrt{n}\,]+\frac{1}{100}$$

と，ここまでは何とか辿り着きたいところです。

ただ，ガウス記号は見づらいので，$[\sqrt{n}\,]=k$ などとおくと，

$$k^2+\frac{1}{50}k+\frac{1}{10000} \leqq n < k^2+\frac{1}{5}k+\frac{1}{100} \quad \cdots (*)$$

となります。

ここからが本題です。

試しに，$k=1$ としてみますと，$1+(\text{ゴミ}) \leqq n < 1+(\text{ゴミ})$ ですから，これを満たす n は存在しません。

$k=2$ としてみると，$4+(\text{ゴミ}) \leqq n < 4+(\text{ゴミ})$ なので，これも n が存在しません。

こうしてみると，だいぶ要領が掴めてきました。

ここが同じ整数だとマズイ

⇩

$$\bigcirc+(\text{ゴミ}) \leqq n < \bigcirc+\frac{1}{5}k+\frac{1}{100}$$

ここが 1 以上になっていないといけない

と頭が動けばあとは愚直に調べるだけです。
10 番目なので，全部出してもたかがしれていますし，確実です。

【解答】

(1) 与えられた条件は，$\sqrt{n}$ の小数部分について，小数第 2 位に初めて 0 でない数が現れるということであるから，

$$10^{-2} \leqq \sqrt{n}-[\sqrt{n}\,] < 10^{-1}$$

（ただし，$[\sqrt{n}\,]$ は $\sqrt{n}$ の整数部分を表す。）

$[\sqrt{n}\,]=k$ とおくと，$k+\dfrac{1}{100} \leqq \sqrt{n} < k+\dfrac{1}{10}$

両辺 2 乗しても同値性は失われないため，

$$k^2+\frac{1}{50}k+\frac{1}{10000} \leqq n < k^2+\frac{1}{5}k+\frac{1}{100} \quad \cdots (*)$$

$k=1,\ 2,\ 3,\ 4$ のとき $(*)$ を満たす自然数 n は存在しない。

$k=5$ のとき，$25+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10000} \leqq n < 26+\dfrac{1}{100}$ で
これを満たす n は $n=26$

ゆえに，求める最小の n は $n=26$ …答

(2) $k=6$ のとき，$(*)$ は $36+\dfrac{6}{50}+\dfrac{1}{10000} \leqq n < 37+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{100}$
でこれを満たす n は $n=37$

$k=7$ のとき，$(*)$ は $49+\dfrac{7}{50}+\dfrac{1}{10000} \leqq n < 50+\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{100}$ で
これを満たす n は $n=50$

$k=8$ のとき，$(*)$ は $64+\dfrac{8}{50}+\dfrac{1}{10000} \leqq n < 65+\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{100}$ で
これを満たす n は $n=65$

$k=9$ のとき，$(*)$ は $81+\dfrac{9}{50}+\dfrac{1}{10000} \leqq n < 82+\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{100}$ で
これを満たす n は $n=82$

$k=10$ のとき，$(*)$ は $100+\dfrac{10}{50}+\dfrac{1}{10000} \leqq n < 102+\dfrac{1}{100}$ で
これを満たす n は $n=101,\ 102$

$k=11$ のとき，$(*)$ は $121+\dfrac{11}{50}+\dfrac{1}{10000} \leqq n < 123+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{100}$ で
これを満たす n は $n=122,\ 123$

$k=12$ のとき，$144+\dfrac{12}{50}+\dfrac{1}{10000} \leqq n < 146+\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{100}$ で
これを満たす n は $n=145,\ 146$

ゆえに，小さい方から 10 番目の n は $n=145$ …答

【総括】

「小数第何位に初めて 0 でない数が現れるか」

という問題（いわゆる小数首位の問題）は指数対数の分野の典型問題の一つですが，どちらかと言えば本問は $\sqrt{n}$ に関する評価や考察を要する問題でした。

解答自体は見ての通り，実験しているうちに終わってしまいました。

この問題がもう少しアクセルを踏めば，

「小さい方から 300 番目の n を求めよ。」

ぐらいでしょうか。

$$k^2+\frac{1}{50}k+\frac{1}{10000}\leqq n<k^2+\frac{1}{5}k+\frac{1}{100}\quad\cdots(*)$$

まずは $k=1$，2，…，49 の範囲で考えます。

$k=5\sim9$ までは n は 1 個ずつあり，ここまでで 5 個

$k=10\sim14$ までは n は 2 個ずつあり，10 個で，ここまでで 15 個

$k=15\sim19$ までは n は 3 個ずつあり，15 個で，ここまでで 30 個

$k=20\sim24$ までは n は 4 個ずつあり，20 個で，ここまでで 50 個

$k=25\sim29$ までは n は 5 個ずつあり，25 個で，ここまでで 75 個

$k=30\sim34$ までは n は 6 個ずつあり，30 個で，ここまでで 105 個

$k=35\sim39$ までは n は 7 個ずつあり，35 個で，ここまでで 140 個

$k=40\sim44$ までは n は 8 個ずつあり，40 個で，ここまでで 180 個

$k=45\sim49$ までは n は 9 個ずつあり，45 個で，ここまでで 225 個

次に，$k=50$，51，……，99 の範囲で考えます。
($(*)$ の最左辺の整数部分をつかさどる部分が繰り上がります)

$k=50\sim54$ までは n は 9 個ずつあり，45 個で，ここまでで 270 個

ここからは手作業です。

$k=55$ では n は 10 個あり，ここまでで 280 個

$k=56$ では n は 10 個あり，ここまでで 290 個

$k=57$ では n は 10 個あり，ここまでで 300 個

$$57^2+1+\frac{7}{50}+\frac{1}{10000}\leqq n<57^2+11+\frac{2}{5}+\frac{1}{100}$$

これを満たす小さい方から 10 個目の n は $n=57^2+10=3259$ ということになり，題意を満たす 300 番目の n は $n=3259$ ということになります。