

king property 【類題3】

(1) 連続関数 $f(x)$ および定数 a について

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^{\frac{a}{2}} \{f(x) + f(a-x)\} dx$$

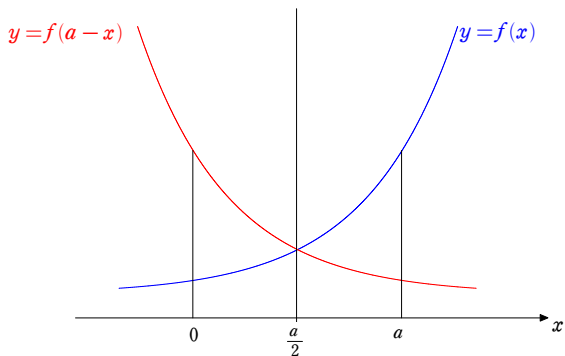
が成り立つことを証明せよ。

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ を求めよ。

< '90 高知大 >

【戦略】

$y=f(x)$, $y=f(a-x)$ は $x=\frac{a}{2}$ に関して対称です。



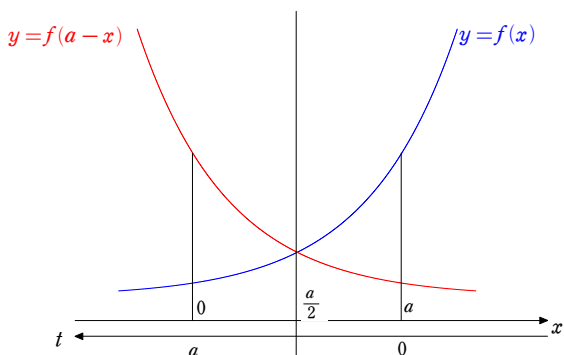
つまり, $\int_0^a f(x) dx = \int_0^{\frac{a}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a}{2}}^a f(x) dx$ なので

$$\int_{\frac{a}{2}}^a f(x) dx = \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x) dx$$

が成り立つことを示せば勝ちですが, 視覚的には当然です。

式的に示すには, $a-x=t$ と置くことになります。

言わば



のように t 軸を定めるわけです。

(2) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$, $a = \frac{\pi}{2}$ として (1) を利用すれば解決です。

【解答】

(1) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ とおく。

$$a-x=t \text{ とおくと, } \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & \frac{a}{2} & \rightarrow a \\ \hline t & \frac{a}{2} & \rightarrow 0 \\ \hline \end{array} \quad -dx=dt$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{a}{2}}^a f(x) dx &= \int_{\frac{a}{2}}^0 f(a-x)(-dt) \\ &= \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x) dt \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } \int_0^a f(x) dx &= \int_0^{\frac{a}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a}{2}}^a f(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{a}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x) dx (\because \textcircled{1}) \\ &= \int_0^{\frac{a}{2}} \{f(x) + f(a-x)\} dx \end{aligned}$$

となり, 題意は示された。

(2) (1) において, $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$, $a = \frac{\pi}{2}$ とすると

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \right\} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} + \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} \right\} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \\ &= \frac{\pi}{4} \dots \textcircled{\square} \end{aligned}$$

【総括】

【類題2】における片割れの導出です。

king-property の首根っこを掴むような誘導が付いていました。

置換におけるイメージ (逆向きに t 軸をとるイメージ) も併せて押さえておきましょう