２つの積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx\,,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

の値を求めよ。

＜ '92 弘前大 ＞

【戦略】

被積分関数 $\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$ **,** $\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}$ **は** $x=\frac{\pi}{4}$ **に関して対称なグラフです。**

king−property **の絶好の使いどころであり，**

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx\,,\ J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

とおいたとき， $I=J$ **となることが見通せます。**
（ただし，はっきり言って勉強していればという話であり，対称性に目を付け， king−property **のシナリオで仕留めることを目論めないと厳しいでしょう。）**

一方， $I+J=\frac{\pi}{2}$ **であることは即座に分かりますから，**

$$I=J=\frac{\pi}{4}$$

となり，解決です。

【解答】

(1) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$ とおく。

$\frac{\pi}{2}-x=t$ とおくと，

x	$0 \to \frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2} \to 0$

$-dx=dt$

$$\begin{aligned}I&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}(-dt)\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\,dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx\quad (\because\ \text{積分変数は自由})\\&=J\end{aligned}$$

ゆえに，$I-J=0$ …①

$$\begin{aligned}\text{一方，}I+J&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\\&=\frac{\pi}{2}\ \cdots②\end{aligned}$$

①，② より，$I=J=\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx=\frac{\pi}{4}\,,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx=\frac{\pi}{4}\ \cdots\text{答}$$

【総括】

本問で $f(x)=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$ として，king property を用いると

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(0+\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(0+\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(0+\frac{\pi}{2}-x\right)}\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx\end{aligned}$$

となります。

なお，今回は $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$ の両方を訊かれていたわけですが，どちらか一方のみが訊かれていた場合，ハードルが上がるでしょう。