(1) 関数 $f(x)$ に対し，等式 $\int_0^{\pi} x\,f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$ を証明せよ。

(2) 定積分 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}\,dx$ の値を求めよ。

＜ '05 弘前大 ＞

【戦略】

(1) **例題と違い $\sin(\pi-x)=\sin x$ により，$f(\pi-x)=f(x)$ という性質が隠れるような出題の仕方であり，初見の場合の難易度は例題よりも高いかもしれません。**

逆に，経験済みであれば $\pi-x=t$ という置換がスムーズに出てくるでしょう。

(2) **(1) の活用を考えれば，$f(\sin x)=\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}$ $\left(f(X)=\frac{X}{1+X^2}\right)$ という設定に行き着くでしょう。**

【解答】

(1) $I=\int_0^{\pi} x\,f(\sin x)\,dx$ とおく。

$\pi-x=t$ とおくと，

x	$0 \to \pi$
t	$\pi \to 0$

$-dx=dt$

$$
\begin{aligned}
I&=\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin(\pi-t))(-dt)\\
&=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)\,dt \quad (\because \sin(\pi-t)=\sin t)\\
&=\pi\int_0^{\pi}f(\sin t)\,dt-\int_0^{\pi}t\,f(\sin t)\,dt\\
&=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)\,dx-\int_0^{\pi}x\,f(\sin x)\,dx \quad (\because \text{積分変数は自由})\\
&=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)\,dx-I
\end{aligned}
$$

ゆえに，$2I=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)\,dx$ であり，$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\,dx$ を得る。

これより，$\int_0^{\pi}x\,f(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\,dx$ が成立する。

(2) $f(X)=\frac{X}{1+X^2}$ とすると，

$$f(\sin x)=\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}$$

求める定積分を J とすると，

$$
\begin{aligned}
J&=\int_0^{\pi}x\,f(\sin x)\,dx\\
&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\,dx\\
&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\,dx\\
&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{2-\cos^2 x}\,dx
\end{aligned}
$$

$\cos x=u$ とおくと，$-\sin x\,dx=du$

x	$0 \to \pi$
u	$1 \to -1$

$$
\begin{aligned}
J&=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{1}{2-u^2}(-du)\\
&=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2-u^2}\,du\\
&=\pi\int_0^{1}\frac{1}{2-u^2}\,du \quad (\because \text{偶関数の性質})\\
&=\pi\int_0^{1}\frac{1}{(\sqrt{2}+u)(\sqrt{2}-u)}\,du\\
&=\pi\int_0^{1}\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}-u}+\frac{1}{\sqrt{2}+u}\right\}du\\
&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\Big[\log|\sqrt{2}+u|-\log|\sqrt{2}-u|\Big]_0^1\\
&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\log\left|\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}\right|\right]_0^1\\
&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left\{\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\log 1\right\}\\
&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1)^2\\
&=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1) \cdots \text{答}
\end{aligned}
$$

【総括】

本問で king property を用いると

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}\,dx=\int_0^{\pi}\frac{(0+\pi-x)\sin(0+\pi-x)}{1+\sin^2(0+\pi-x)}\,dx$$

ということになります。

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}\,dx&=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\sin^2(\pi-x)}\,dx\\&=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{1+\sin^2 x}dx-\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}\,dx\end{aligned}$$

移項すれば，$2\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}\,dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\,dx$ となり

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\,dx$$

を得ます。