(1) 連続関数 $f(x)$ が，すべての実数 x について $f(\pi-x)=f(x)$ を満たすとき，$\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=0$ がなりたつことを証明せよ。

(2) $\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3x}{4-\cos^2x}\,dx$ を求めよ。

＜ '05 名古屋大 ＞

【戦略】

(1) $I=\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx$ **とおきます。**

$\pi-x=t$ **という置換により，** $I=-\int_0^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)f(t)\,dt$ **という部分まではほぐせると思います。**

定積分の意味が分かっていれば， $\int_0^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)f(t)\,dt=I$ **なので** $I=-I$ **となり，** $I=0$ **を得ることになり証明完了です。**

(2) (1) **という強力なヒントがあります。**

(1) **をヒントと捉えるには，**(1) **で示した** $\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=0$ **という形を，** $\int_0^{\pi}\left\{xf(x)-\frac{\pi}{2}f(x)\right\}dx=0$ **と一旦展開し，移項した**

$$\int_0^{\pi}xf(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(x)\,dx$$

と見る必要があります。

これは， x **倍（変数倍）が** $\frac{\pi}{2}$ **倍（定数倍）となっていることを意味します。**

与えれらた定積分の中身を $xf(x)$ **の形で見ようと思うと**

$f(x)=\frac{\sin^3x}{4-\cos^2x}$ **と設定することになりますし，**(1) **の利用条件**

$f(\pi-x)=f(x)$ **を確かめたくなります。**

その後は， $\int_0^{\pi}\frac{\sin^3x}{4-\cos^2x}\,dx$ **という定積分の処理に集中すればよいでしょう。**

置換を使わなくても出来ますが，眼に優しくするために

$\int_0^{\pi}\frac{1-\cos^2x}{4-\cos^2x}\cdot\sin x\,dx$ **と見て** $\cos x=u$ **と置換します。**

【解答】

(1) $I=\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx$ とおく。

$\pi-x=t$ とおくと，

x	$0\ \to\ \pi$
t	$\pi\ \to\ 0$

$-dx=dt$

$$\begin{aligned}I&=\int_{\pi}^{0}\left\{(\pi-t)-\frac{\pi}{2}\right\}f(\pi-t)(-dt)\\&=\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)f(t)\,dt\ (\because\ \text{条件}\ f(\pi-x)=f(x))\\&=-\int_0^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)f(t)\,dt\\&=-\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx\ (\because\ \text{積分変数は自由})\\&=-I\end{aligned}$$

ゆえに，$2I=0$ であり，$I=0$ を得る。

これより，$\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=0$ が成立する。

(2) $f(x)=\frac{\sin^3x}{4-\cos^2x}$ とすると，

$$\begin{aligned}f(\pi-x)&=\frac{\sin^3(\pi-x)}{4-\cos^2(\pi-x)}\\&=\frac{\sin^3x}{4-(-\cos x)^2}\\&=\frac{\sin^3x}{4+\cos^2x}\\&=f(x)\end{aligned}$$

よって，(1) を整理した $\int_0^{\pi}x\,f(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(x)\,dx$ が成立する。

求める定積分を J とすると，

$$\begin{aligned}J&=\int_0^{\pi}x\,f(x)\,dx\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(x)\,dx\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3x}{4-\cos^2x}\,dx\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2x}{4-\cos^2x}\cdot\sin x\,dx\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos^2x}{4-\cos^2x}\cdot\sin x\,dx\end{aligned}$$

$\cos x=u$ とおくと，$-\sin x\,dx=du$

x	$0\ \to\ \pi$
u	$1\ \to\ -1$

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{\pi}{2}\int_{1}^{-1}\frac{1-u^2}{4-u^2}(-du)\\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1-u^2}{4-u^2}\,du\\
&= \pi\int_{0}^{1}\frac{1-u^2}{4-u^2}\,du \quad (\because \text{ 偶関数の性質})\\
&= \pi\int_{0}^{1}\frac{4-u^2-3}{4-u^2}\,du\\
&= \pi\int_{0}^{1}\left(1+\frac{3}{u^2-4}\right)du\\
&= \pi+3\pi\int_{0}^{1}\frac{1}{(u+2)(u-2)}\,du\\
&= \pi+\frac{3\pi}{4}\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u+2}\right)du\\
&= \pi+\frac{3\pi}{4}\Big[\log|u-2|-\log|u+2|\Big]_{0}^{1}\\
&= \pi+\frac{3\pi}{4}\left[\log\left|\frac{u-2}{u+2}\right|\right]_{0}^{1}\\
&= \pi+\frac{3\pi}{4}\left\{\log\frac{1}{3}-\log 1\right\}\\
&= \pi+\frac{3\pi}{4}\log\frac{1}{3}\\
&= \pi-\frac{3\pi}{4}\log 3\\
&= \left(1-\frac{3}{4}\log 3\right)\pi \quad \cdots \text{答}
\end{aligned}
$$

仮分数→帯分数

【総括】

(1) で $\pi-x=t$ という置換により，$I=-\int_0^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)f(t)\,dt$ を得た後

$t=\pi-x$ を代入すると当たり前ですが元に戻ってしまいます。

気を付けたいのは

$$\int_0^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)f(t)\,dt=\Big[F(t)\Big]_0^{\pi}=F(\pi)-F(0)\,(=\text{定数})$$

と，この定積分の結果は「定数」であり，その定数を I と呼んでいるわけです。

別に積分変数は

$$\int_0^{\pi}\left(p-\frac{\pi}{2}\right)f(p)\,dp=\Big[F(p)\Big]_0^{\pi}=F(\pi)-F(0)\,(=\text{定数})$$
$$\int_0^{\pi}\left(a-\frac{\pi}{2}\right)f(a)\,da=\Big[F(a)\Big]_0^{\pi}=F(\pi)-F(0)\,(=\text{定数})$$

などというように，t でなくても何でもいいですね。

なお，本問のバックボーンにあるのは

「king property（キングプロパティー）」

と呼ばれるものです。

【参考】

king property

a，b を定数とし，$f(x)$ が連続関数であるとするとき

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

が成立する。

【式的証明】

$\int_a^b f(a+b-x)\,dx$ において，$a+b-x=t$ とおくと

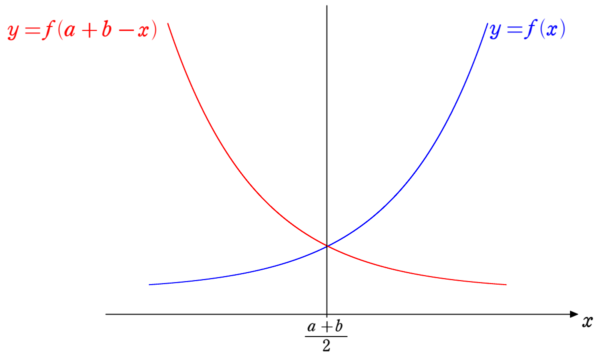
x	$a \to b$
t	$b \to a$

$-dx=dt$

よって，

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(a+b-x)\,dx &= \int_b^a f(t)(-dt)\\
&= \int_a^b f(t)\,dt\\
&= \int_a^b f(x)\,dx
\end{aligned}
$$

【視覚的イメージ】

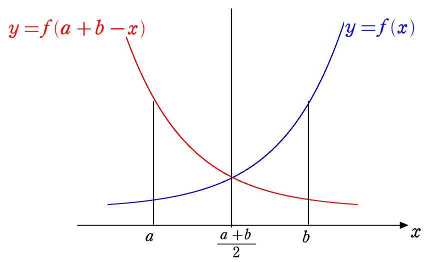


$g(x)=f(a+b-x)$ と置きなおします。任意の実数 s に対して

$$
\begin{aligned}
g\left(\frac{a+b}{2}-s\right) &= f\left(a+b-\frac{a+b}{2}+s\right)\\
&= f\left(\frac{a+b}{2}+s\right)
\end{aligned}
$$

ですから，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ は直線 $x=\frac{a+b}{2}$ に関して対称です。

したがって，面積的にも $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\,dx$ が成り立つことになります。



【本問においては】

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}\,dx=\int_0^{\pi}\frac{(0+\pi-x)\sin^3(0+\pi-x)}{4-\cos^2(0+\pi-x)}$$

と king property を用いると

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}\,dx&=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin^3(\pi-x)}{4-\cos^2(\pi-x)}\,dx\\&=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin^3 x}{4-(-\cos x)^2}\,dx\\&=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin^3 x}{4-\cos^2 x}\,dx-\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}\,dx\end{aligned}$$

となり，移項すれば，$2\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}\,dx=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin^3 x}{4-\cos^2 x}\,dx$

すなわち，$\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}\,dx$ となります。