媒介変数表示 $\begin{cases} x=\sin 3t \\ y=\sin 2t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ で定める曲線を C とする。

(1) 曲線 C 上の点で，x 座標が最大となる点の座標をすべて求めよ。
また，x 座標が最小となる点の座標をすべて求めよ。

(2) 曲線 C と直線 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$x=0$，$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ との交点の座標をすべて求めよ。

(3) 曲線 C が x 軸に関して対称であることを示せ。

(4) 座標平面上に曲線 C の概形を描け。

(5) 曲線 C が囲む図形の面積を求めよ。

＜ ’14 同志社大 ＞

【戦略】

(1) **t の変化に伴って動く x 座標の動きだけを捉えるのであれば**

$x=\sin 3t$ のグラフを書いてしまうのが一番手っ取り早いでしょう。

(2) **x 座標が $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，0，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となるような t の値をとらえていけば解決です。**

(3) $x(t)=\sin 3t$，$y(t)=\sin 2t$ **と t を時刻と捉えると分かりやすいでしょう。**

問題の主張は異なる時刻 t_1，t_2 $(t_1<t_2)$ に対して，

$$x(t_1)=x(t_2),\ \ y(t_1)=-y(t_2)$$

となるような $(t_1,\ t_2)$ の組が存在することを示唆しています。

$0 \leqq t \leqq \pi$ **の範囲において考えれば，** $\begin{cases} x(t)=x(\pi-t) \\ y(t)=y(\pi-t) \end{cases}$ **であることが分かると思います。**

（$(t_1,\ t_2)=(t,\ \pi-t)$ $\left(0 \leqq t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ **が見つかったということです。**）

もちろん $t=\dfrac{\pi}{2}$ のときはちょうど x 軸で $(x(t_1),\ y(t_1))$，$(x(t_2),\ y(t_2))$ **が重なっていると思えば，題意の主張は通ります。**

(4) **パラメータ表示された曲線の概形を捉えるためには**

t の変化に伴う $\begin{cases} x \text{ の増減} \\ y \text{ の増減} \end{cases}$ **を調べるわけで，** $\dfrac{dx}{dt}$，$\dfrac{dy}{dt}$ **の符号を追っていきます。**

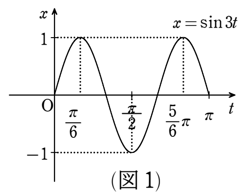
(3) **の結果から，** $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ **の範囲**（$y \geqq 0$ **の部分**）**を考えれば十分です。**

(5) **パラメータ表示された曲線の面積の扱いについては演習量が手際の良さを左右します。**

手や頭の動かし方は【解答】の中に注釈を入れる形で解説します。

【解答】

(1) t の変化に伴う x が最大となる t は



(図 1)

(図 1) から $t=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$

それぞれに対応する座標は

$\left(\sin\dfrac{\pi}{2},\ \sin\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\left(\sin\dfrac{5}{2}\pi,\ \sin\dfrac{5}{3}\pi\right)$

すなわち，$\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ … 答

また，t の変化に伴う x が最小となる t は

(図 1) から $t=\dfrac{\pi}{2}$

これに対応する座標は $\left(\sin\dfrac{3}{2}\pi,\ \sin\pi\right)$

すなわち，$(-1,\ 0)$ … 答

(2) C の x 座標 $\sin 3t$ の値について

$\sin 3t=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる t $(0 \leqq t \leqq \pi)$ の値は $0 \leqq 3t \leqq 3\pi$ に注意して

$3t=\dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$，すなわち $t=\dfrac{5}{12}\pi$，$\dfrac{7}{12}\pi$

それぞれに対応する座標は $\left(\sin\dfrac{5}{4}\pi,\ \sin\dfrac{5}{6}\pi\right)$，$\left(\sin\dfrac{7}{4}\pi,\ \sin\dfrac{7}{6}\pi\right)$

すなわち $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

$\sin 3t=0$ となる t $(0 \leqq t \leqq \pi)$ の値は $0 \leqq 3t \leqq 3\pi$ に注意して

$3t=0$，π，2π，3π，すなわち $t=0$，$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2}{3}\pi$，π

それぞれに対応する座標は

$(\sin 0,\ \sin 0)$，$\left(\sin\pi,\ \sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$，$\left(\sin 2\pi,\ \sin\dfrac{4}{3}\pi\right)$，$(\sin 3\pi,\ \sin 2\pi)$

このうち，異なる座標は $(0,\ 0)$，$\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(0,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\sin 3t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる t $(0 \leqq t \leqq \pi)$ の値は $0 \leqq 3t \leqq 3\pi$ に注意して

$3t=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{9}{4}\pi$，$\dfrac{11}{4}\pi$，すなわち $t=\dfrac{\pi}{12}$，$\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{11}{12}\pi$

それぞれに対応する座標は

$\left(\sin\dfrac{\pi}{4},\ \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\left(\sin\dfrac{3}{4}\pi,\ \sin\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\left(\sin\dfrac{9}{4}\pi,\ \sin\dfrac{3}{2}\pi\right)$，$\left(\sin\dfrac{11}{4}\pi,\ \sin\dfrac{11}{6}\pi\right)$

すなわち，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 1\right)$，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -1\right)$，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

以上から

$$\begin{cases} \text{直線 } x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ との交点：} \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\dfrac{1}{2}\right) \\ \text{直線 } x=0 \text{ との交点：} (0,\ 0),\ \left(0,\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \text{直線 } x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ との交点：} \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\dfrac{1}{2}\right),\ \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \pm 1\right) \end{cases} \quad \cdots \text{答}$$

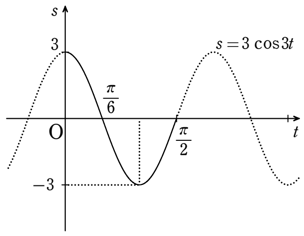
(3)　$x(t)=\sin 3t$，$y(t)=\sin 2t$ とする。

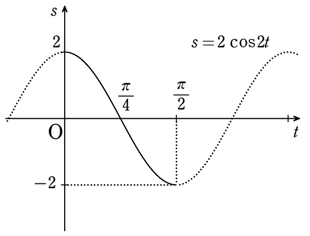
$$\begin{aligned} x(\pi-t)&=\sin(3\pi-3t) \\ &=\sin(\pi-3t+2\pi) \\ &=\sin(\pi-3t) \\ &=\sin 3t \\ &=x(t) \end{aligned} \qquad , \qquad \begin{aligned} y(\pi-t)&=\sin(2\pi-2t) \\ &=\sin(-2t) \\ &=-\sin 2t \\ &=-y\,(t) \end{aligned}$$

これより，曲線 C は x 軸に関して対称である。

(4)　(3) の結果から，$y \geqq 0$ となるような t の範囲である $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で考えれば十分である。

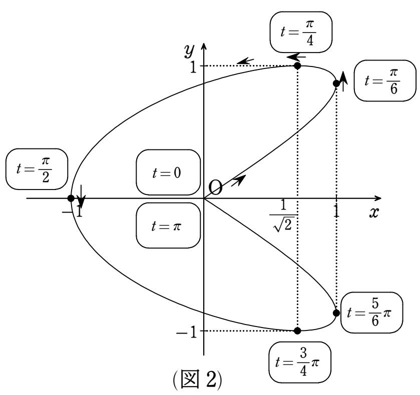
$\dfrac{dx}{dt}=3\cos 3t$，$\dfrac{dy}{dt}=2\cos 2t$ について，$s=3\cos 3t$，$s=2\cos 2t$ のグラフで $\dfrac{dx}{dt}$，$\dfrac{dy}{dt}$ の符号を判定して増減表をかく。





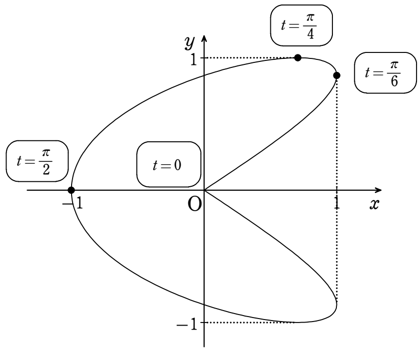
t	0	…	$\frac{\pi}{6}$	…	$\frac{\pi}{4}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$	+	+	0	−	−	−	0
x	→	→	·	←	←	←	·
$\frac{dy}{dt}$	+	+	+	+	0	−	−
y	↑	↑	↑	↑	·	↓	↓
$\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$	↗	↗	↑	↖	←	↙	↓
$(x,\ y)$	$(0,\ 0)$		$\left(1,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$		$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1\right)$		$(-1,\ 0)$

(3) の結果から C の概形は x 軸に関して対称であることにも注意して図示すると (図 2) のようになる。



(図 2)

(5)

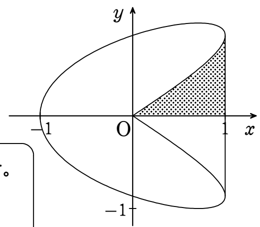


$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{6}$ に対応する部分を C_1，$\dfrac{\pi}{6} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対応する部分を C_2 とする。

C_1，$x=1$，x 軸 で囲まれる部分の面積を S_1
C_2，$x=1$，x 軸 で囲まれる部分の面積を S_2

とする。

< S_1 について >



$$S_1=\int_0^1 y\,dx$$

まずは
” 普通 ”
に立式します

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}} y\,\frac{dx}{dt}\,dt$$

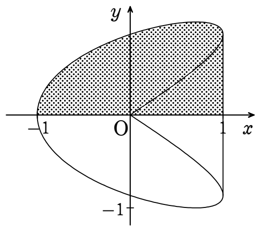
y を x の式にするのは困難です。
y は t の式なので
$dx \to dt$
にすることを考えます。

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2t \cdot 3\cos 3t\ dt$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2t\cos 3t\ dt$$

この段階で計算するのは
得策ではありません。
グッと堪えてください。

< S_2 について >



$$S_2=\int_{-1}^1 y\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} y\,\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \sin 2t \cdot 3\cos 3t\ dt$$

積分区間が違うだけで
$\int$ の中身自体はさっきと
同じです。

$$=3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \sin 2t\cos 3t\ dt$$

求める面積 S は対称性も考えると，$S=2\,(S_2-S_1)$ であるので

$$S=2\left\{3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\sin 2t\cos 3t\ dt-3\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sin 2t\cos 3t\ dt\right\}$$

$$=6\left\{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\sin 2t\cos 3t\ dt-\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sin 2t\cos 3t\ dt\right\}$$

$$=6\left\{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\sin 2t\cos 3t\ dt+\int_{\frac{\pi}{6}}^{0}\sin 2t\cos 3t\ dt\right\}$$

積分区間が繋がります。

$$=6\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos 3t\ \sin 2t\ dt$$

$$=6\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{2}(\sin 5t-\sin t)\,dt$$

$$=3\left[-\frac{1}{5}\cos 5t+\cos t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0}$$

積分は
積よりも和の方が
相性がいいので，
積を和に変換する
積和公式の利用が常套手段
です。

$$=\frac{12}{5}\ \cdots 答$$

【総括】

媒介変数 t を用いて

$$\begin{cases} x=A\sin at \\ y=B\sin(bt+\delta) \end{cases}$$

と表される曲線をリサージュ曲線と言います。

※リサジュー曲線と表記されることもあり，どちらの呼ばれ方をするのかについては揺れがあります。

これについては sin　である必要はなく，要するに

「２つの単振動を合成して得られる図形」

ということです。

（ペンを縦に揺らしながら横に往復運動させてみてください。）

入試と言う観点から言えば

・パラメータ表示された関数に関する扱い

という位置づけにあたります。

リサージュ曲線はその素材としてしばしば出題されます。

面積だけでなく，回転体の体積など，基本的な各種図形量の計算については習熟しておきましょう。