x の 3 次関数

$$f(x)=x^3-3x^2-4x+k$$

について，次の問いに答えよ。ただし，k は定数とする。

(1)　$f(x)$ が極値をとるときの x を求めよ。

(2)　方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 つの整数解をもつとき，k の値およびその整数解を求めよ。

＜ '11 横浜国立大 ＞

【戦略】

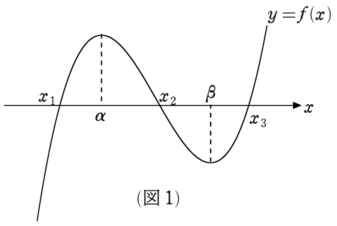
(1)　**微分して調べるだけです。**

(2)　(1) **で，**

$$x=\frac{3-\sqrt{21}}{3} \text{ で極大，} x=\frac{3+\sqrt{21}}{3} \text{ で極小}$$

という結果を得るはずです。

これにより，$f(x)=0$ が異なる 3 つの整数解 x_1，x_2，x_3 $(x_1<x_2<x_3)$ をもつとき，



(図 1)

という状況です。

（**汚いので** $\alpha=\dfrac{3-\sqrt{21}}{3}$，$\beta=\dfrac{3+\sqrt{21}}{3}$ **とおきました。**）

ここで，目を付けたいのは，

「x_2 が定数と定数の間に挟まれている」

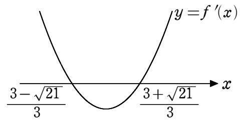
ということです。

x_2 が整数であれば，□$<x_2<$△ と挟まれていれば，候補が決まってきます。

x_2 がとり得る整数が分かれば，あとは個別に検証するだけです。

【解答】

(1)　$f'(x)=3x^2-6x-4$



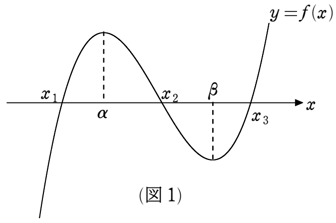
$f'(x)=0$ となる x は $x=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{3}$

増減表は

x	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$x=\dfrac{3-\sqrt{21}}{3}$ で極大，$x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{3}$ で極小となる。… 答

(2)　$\alpha=\dfrac{3-\sqrt{21}}{3}$，$\beta=\dfrac{3+\sqrt{21}}{3}$ とおく。



(図 1)

$f(x)=0$ が異なる 3 つの実数解 x_1，x_2，x_3 $(x_1<x_2<x_3)$ をもつとき (図 1) から

$$x_1<\alpha<x_2<\beta<x_3 \quad \cdots ①$$

$4<\sqrt{21}<5$ に注意すると，$\begin{cases} \dfrac{3-5}{3}<\alpha<\dfrac{3-4}{3} \\ \dfrac{3+4}{3}<\beta<\dfrac{3+5}{3} \end{cases}$

すなわち，$\begin{cases} -\dfrac{2}{3}<\alpha<-\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{7}{3}<\beta<\dfrac{8}{3} \end{cases}$ $\cdots ②$

$x_1<\alpha<x_2$
$-\dfrac{2}{3}<\alpha<-\dfrac{1}{3}$

$x_2<\beta<x_3$
$\dfrac{7}{3}<\beta<\dfrac{8}{3}$

①，② から $-\dfrac{2}{3}<x_2$ かつ $x_2<\dfrac{8}{3}$，すなわち $-\dfrac{2}{3}<x_2<\dfrac{8}{3}$

条件から x_2 は整数であるため，$x_2=0$，1，2

(i)　$x_2=0$ のとき

$f(x_2)=0$，すなわち $f(0)=0$ なので，$k=0$

このとき，

$$\begin{aligned} f(x)&=x^3-3x^2-4x \\ &=x(x^2-3x-4) \\ &=x(x+1)(x-4) \end{aligned}$$

よって，$f(x)=0$ の解は $x=-1$，0，4 となり，条件を満たす。

(ii)　$x_2=1$ のとき

$f(x_2)=0$，すなわち $f(1)=0$ より，$1^3-3\cdot1^2-4\cdot1+k=0$

ゆえに，$k=6$

このとき，

$$\begin{aligned}f(x)&=x^3-3x^2-4x+6\\&=(x-1)(x^2-2x-6)\end{aligned}$$

$f(x)=0$ の解は $x=1$，$1\pm\sqrt{7}$ となり，条件を満たさない。

(iii)　$x_2=2$ のとき

$f(x_2)=0$，すなわち $f(2)=0$ より，$2^3-3\cdot2^2-4\cdot2+k=0$

ゆえに，$k=12$

このとき，

$$\begin{aligned}f(x)&=x^3-3x^2-4x+12\\&=(x-2)(x^2-x-6)\\&=(x-2)(x+2)(x-3)\end{aligned}$$

$f(x)=0$ の解は $x=-2$，2，3 となり，条件を満たす。

以上 (i)，(ii)，(iii) より，$f(x)=0$ が異なる 3 つの整数解をもつときの k の値，およびその整数解は

$$\begin{cases}k=0,\ x=-1,\ 0,\ 4\\k=12,\ x=-2,\ 2,\ 3\end{cases}\ \cdots 答$$

【総括】

α，β は汚いから文字でおいただけで，実際には具体的な数値です。

$\alpha<x_2<\beta$，すなわち $\dfrac{3-\sqrt{21}}{3}<x_2<\dfrac{3+\sqrt{21}}{3}$ と挟めているわけですから，x_2 が整数であれば，とり得る値は限られます。

3 次方程式が整数解をもつということと，(1) の設問の位置づけが一見関係なさそうに思えるかもしれませんが，(1) が強力なヒントとなっていたことになります。

なお，ヒントを無視する，あるいは (1) をヒントと気が付かずに，

解と係数の関係の路線から攻める

という路線を検証してみます。

【検証】

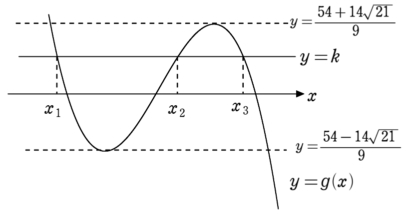
解と係数の関係から

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3\\x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-4\\x_1x_2x_3=-k\end{cases}$$

$x^3-3x^2-4x+k=0$ を定数分離し，$-x^3+3x^2+4x=k$ と見ます。

$g(x)=-x^3+3x^2+4x$ とおくと，$g'(x)=-3x^2+6x+4$

x	$\cdots$	$\dfrac{3-\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{3+\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\dfrac{54-14\sqrt{21}}{9}$	$\nearrow$	$\dfrac{54+14\sqrt{21}}{9}$	$\searrow$



というように，$y=g(x)$，$y=k$ の交点の x 座標が x_1，x_2，x_3 ということになります。

もちろん，x_1，x_2，x_3 は整数である前に実数として存在することになるので，

$$\frac{54-14\sqrt{21}}{9}\leqq k\leqq\frac{54+14\sqrt{21}}{9}$$

ということになります。

$x_1x_2x_3=-k$ なので，x_1，x_2，x_3 が整数であれば，k も整数ですから

k の値は限られます。

そうなれば，あとは個別に調べていく目途が立つことになります。

とは言え，$4<\sqrt{21}<5$ であることから

$$\frac{54-14\cdot5}{9}<\frac{54-14\sqrt{21}}{9}\leqq k\leqq\frac{54+14\sqrt{21}}{9}<\frac{54+14\cdot5}{9}$$

より，$k=-1$，0，1，2，$\cdots$，13 と候補が多いため，あまり現実的ではないでしょう。