a，b を実数とする。

$\displaystyle\int_{-1}^{1}|3x^2+2ax+b|\,dx<2$ ならば，x の 2 次方程式

$$3x^2+2ax+b=0$$

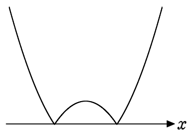
は相異なる 2 つの実数解をもつことを示せ。

＜ ’82 関西大 ＞

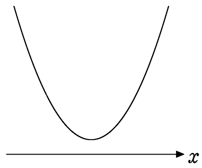
【戦略】

まともに $\displaystyle\int_{-1}^{1}|3x^2+2ax+b|\,dx<2$ という条件をほぐそうと思うと絶対値の処理が煩わしいです。

$y=|3x^2+2ax+b|$ **のグラフが**

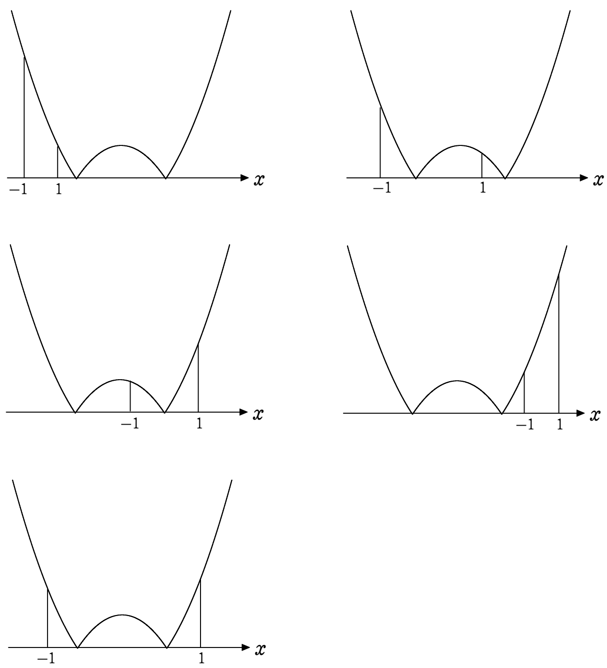


のように，x 軸について折り返されている



のように，浮いている

という場合分けが発生しますし



といったように積分区間によっても場合分けがあり，大騒ぎです。

ただ，よくよく考えると，この大騒ぎする場合はそもそも相異なる 2 つの実数解をもつ場合で，証明もへったくれもありません。

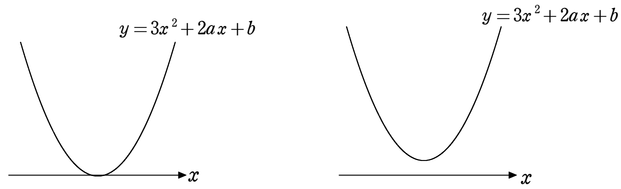
浮いていることがあり得ないということを言えばよく，そうなってくると背理法が自然と思いつくはずです。

【解答】

$$3x^2+2ax+b=0 \quad \cdots(*)$$

が相異なる 2 つの実数解をもたないと仮定する。

すると，$y=3x^2+2ax+b$ のグラフは



のようになり，全ての実数 x に対して $3x^2+2ax+b\geqq 0$ が成立する。

ゆえに，$\displaystyle\int_{-1}^{1}|3x^2+2ax+b|\,dx<2$ という条件は

$$\int_{-1}^{1}(3x^2+2ax+b)\,dx<2$$

となる。

これより，

$$2\int_{0}^{1}(3x^2+b)\,dx<2 \quad (\because \text{偶関数，奇関数の性質})$$

$$\int_{0}^{1}(3x^2+b)\,dx<1$$

$$\Big[x^3+bx\Big]_0^1<1$$

$$1+b<1$$

$$b<0 \quad \cdots ①$$

一方，$(*)$ の判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}\leqq 0$ であるので

$a^2-3b\leqq 0$，すなわち $b\geqq\dfrac{a^2}{3}$ を得る。

a，b は実数であるため，$b\geqq\dfrac{a^2}{3}\geqq 0\cdots②$

①，② は矛盾する。

以上から，仮定が誤りであり，$3x^2+2ax+b=0$ は相異なる 2 つの実数解をもつ。

【総括】

場合分けの多さで大騒ぎした後，

「そもそもこのケース調べなくてもいいじゃん」

とハッとすると気持ちいいですね。

背理法に辿り着ければ，気持ちいいほどすんなり話が進んでいきます。