逆像法４【方程式の実数解のとり得る範囲】

a を実数の定数とする。x の２次方程式

$$x^2+(a-1)x+a+2=0 \cdots ①$$

について，次の値の範囲を求めよ。ただし，重解は１つと数える。

(1)　① が $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲に実数解をただ１つもつとき，a の値の範囲

(2)　$-2 \leqq a \leqq -1$ のとき，① の実数解 x のとりうる値の範囲

＜ ’00 金沢大 ＞

【戦略】

(1)　**いわゆる「２次方程式の解の配置問題」と呼ばれるもので，与えられた２次方程式が「こういう解をもっててください」と問われる問題です。**

本問のタイプは厄介で，整理力が必要です。

ざっくりと

$$\begin{cases} x=0 \text{ を解にもつとき} \\ x=2 \text{ を解にもつとき} \\ 0<x<2 \text{ の範囲に解をもつとき} \begin{cases} \text{重解を含まないとき} \\ \text{重解のとき} \end{cases} \end{cases}$$

と整理しながら進めていきます。

(2)　**a が動いたときの x がとり得る範囲を考えるのは厄介です。**

そこで，先に x の値を指定し，a を仕組めるかという「逆像法」の考え方で仕留めます。

例えば，$x=1$ は解になれる？と考えると

$1^2+(a-1)\cdot 1+a+2=0$，**すなわち** $a=-1$ **であれば，① の解に** $x=1$ **が含まれます。**

今回は $-2 \leqq a \leqq -1$ の範囲で a を動かすので，$x=1$ は解になれます。

もう一つ，$x=10$ は解になれる？と考えると

$10^2+(a-1)\cdot 10+a+2=0$，**すなわち** $a=-\dfrac{92}{11}$ **であれば，① の解に** $x=10$ **が含まれます。**

しかし，今は $-2 \leqq a \leqq -1$ の範囲で a を動かすので，$x=10$ を解にもつようには仕組めないことになります。

これをしらみつぶしに調べれば，$\begin{cases} \text{解として仕組める値} \\ \text{解として仕組めない値} \end{cases}$ **が分かるため，理屈上，解のとり得る範囲を得ることができます。**

そこで，

　　$x=k$ は解になれる？　なれるとしたらどんな k？

とします。

すると，$k^2+(a-1)k+a+2=0$，すなわち

$$(k+1)a+k^2-k+2=0$$

という a についての方程式が $-2 \leqq a \leqq -1$ の範囲に解をもつような k の範囲を考えればよいということになるでしょう。

【解答】

(1)　$f(x)=x^2+(a-1)x+a+2 \ \left(=\left(x+\dfrac{a-1}{2}\right)^2-\dfrac{(a+1)(a-7)}{4} \right)$

とする。

(i)　$x=0$ を解にもつとき

$f(0)=0$ より，$a=-2$

このとき，$f(x)=x^2-3x$ であり，$f(x)=0$ の解は $x=0$，3

よって，$a=-2$ は題意を満たす。

(ii)　$x=2$ を解にもつとき

$f(2)=0$ より，$3a+4=0$，すなわち $a=-\dfrac{4}{3}$

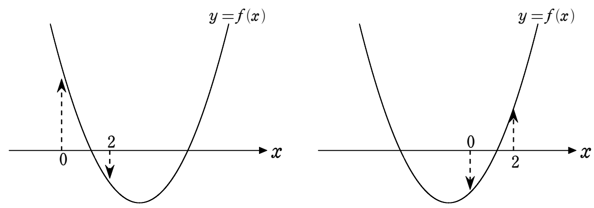
このとき，$f(x)=x^2-\dfrac{7}{3}x+\dfrac{2}{3}$ であり，$f(x)=0$ は

$3x^2-7x+2=0$，すなわち $(x-2)(3x-1)=0$ となるので，

解は $x=2$，$\dfrac{1}{3}$

よって，$a=-\dfrac{4}{3}$ は題意を満たさない。

(iii)　$0<x<2$ の範囲に重解ではないただ１つの実数解をもつとき



$f(0)\cdot f(2)<0$ すなわち $(a+2)(3a+4)<0$ となればよく

$f(0)$ と $f(2)$ が異符号

$$-2<a<-\frac{4}{3}$$

(iv)　$0<x<2$ の範囲に重解をもつとき

$y=f(x)$ の頂点の y 座標が 0 であるので，

$f(x)=\left(x+\dfrac{a-1}{2}\right)^2-\dfrac{(a+1)(a-7)}{4}$ より，$a=-1$，7

このとき，軸の位置について $0<-\dfrac{a-1}{2}<2$，すなわち

$-3<a<1$ であることから，$a=-1$ のみが題意を満たす。

以上 (i)～(iv) より，求める a の値の範囲は

$$-2 \leqq a < -\frac{4}{3},\ a=-1 \cdots 答$$

(2)　① の実数解を $x=k$ とすると

$$k^2+(a-1)k+a+2=0$$

これを満たす a が $-2 \leqq a \leqq -1$ の範囲に存在するための k の条件について考える。

$(k+1)a+k^2-k+2=0$ を満たす a について考える。

$k=-1$ とすると，$0 \cdot a+4=0$ を満たす a が存在しないため，
$k=-1$ にはなり得ない。

ゆえに，$k \fallingdotseq -1$ であり，このとき，$a=-\dfrac{k^2-k+2}{k+1}$

a が $-2 \leqq a \leqq -1$ として存在するとき，$-2 \leqq -\dfrac{k^2-k+2}{k+1} \leqq -1$

すなわち，$1 \leqq \dfrac{k^2-k+2}{k+1} \leqq 2$

辺々 $(k+1)^2$ をかけると，$(k+1)^2 \leqq (k^2-k+2)(k+1) \leqq 2(k+1)^2$

左側の不等式より，$(k+1)\{(k+1)-(k^2-k+2)\} \leqq 0$

これを整理すると，$(k+1)(-k^2+2k-1) \leqq 0$

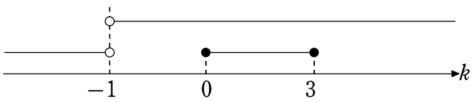
すなわち，$(k+1)(k-1)^2 \geqq 0$ であり，$k \fallingdotseq -1$ より，$k>-1$

右側の不等式より，$(k+1)\{2(k+1)-(k^2-k+2)\} \geqq 0$

これを整理すると $(k+1)(-k^2+3k) \geqq 0$

すなわち $k(k+1)(k-3) \leqq 0$ であり，$k \fallingdotseq -1$ にも注意すると
$k<-1$，$0 \leqq k \leqq 3$

まとめると，$k>-1$ かつ「$k<-1$ または $0 \leqq k \leqq 3$」



すなわち $0 \leqq k \leqq 3$

① の実数解 $x\,(=k)$ としてとり得る値は $0 \leqq x \leqq 3$ … 答

【総括】

(2) をまともに考えると，

$-2 \leqq a \leqq -1$ の範囲で a を動かしたとき，

$$x=\frac{-(a-1) \pm \sqrt{(a-1)^2-4(a+2)}}{2}$$

のとり得る値の範囲を考える

ということになり，見るからに茨の道です。

２次方程式の解のとり得る値の範囲を考える際に逆像法を活用するということを，本問を糧として今後活かしてください。

【参考方針】

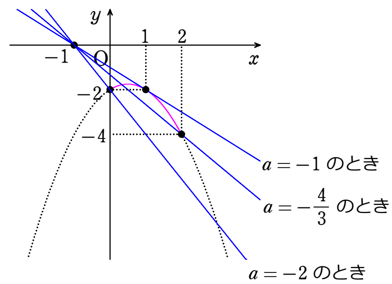
逆像法の話題から逸れますが，

① を $a(x+1)=-x^2+x-2$ と見ると，① の解は

$y=a(x+1)$ **と** $y=-x^2+x-2$ **の共有点の x 座標**

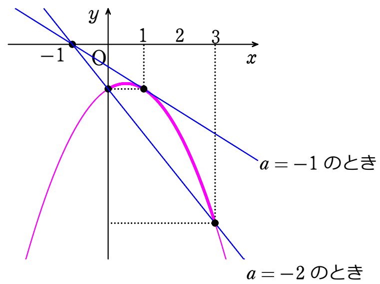
です。

詳しくは省略しますが，接するときや，$x=0$ や $x=2$ を解にもつときの a の値を調べると以下の図のようになります。



(1) は $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で 1 個だけ共有点をもつ a の範囲なので

$$-2 \leqq a < -\frac{4}{3},\ a=-1$$



(2) は共有点の x 座標がとり得る範囲なので，$0 \leqq x \leqq 3$

と，視覚的にとらえることができるでしょう。