θ は $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。x の 4 次方程式

$$x^4-2(\sin\theta+\cos\theta)x^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2=0$$

の実数解のとり得る値の範囲を求めよ。

＜ '05 東京大 改 ＞

【戦略】

$$x^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2\pm\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2-(\sin\theta-\cos\theta)^2}$$
$$=(\sin\theta+\cos\theta)^2\pm\sqrt{4\sin\theta\cos\theta}$$

などとして，θ を $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で動かす

という方針はできれば回避したいと思うのが普通でしょう。

$x=1$ **は解になる？**　$x=2$ **は解になる？**　…

$x=k$ **は解になる？　なれるとしたらどんな** k **？**

という逆像法で考えていきます。

$x=k$ **が解になるとしたら**

$$k^4-2(\sin\theta+\cos\theta)k^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2=0 \quad \cdots①$$

を満たす θ **が** $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ **に存在することになります。**

つまり，これを θ **に関する方程式と見ます。**

この θ **に関する方程式を解こうとなると，**$\sin\theta$，$\cos\theta$ **に関する対称式と看破する必要があります。**

$\sin\theta$，$\cos\theta$ **の対称式については** $t=\sin\theta+\cos\theta$ **とおくのが定石であり** $t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$ **，すなわち** $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$ **と積も得られることになります。**

これにより，① を書き直すと，$k^4-2tk^2+2-t^2=0$**，すなわち**

$$t^2+2k^2t-k^4-2=0 \quad \cdots②$$

となります。

$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ **なので** $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ **のとき，**t **の範囲は** $1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ **ということに注意すると**

「① を満たす θ **が** $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ **に存在する」**

ということは

「② を満たす t **が** $1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ **に存在する」**

という条件に言い換えることができます。

【解答】

$x=k$ が解になるとき

$$k^4-2(\sin\theta+\cos\theta)k^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2=0 \quad \cdots①$$

を満たす θ が $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ に存在する。

$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくと，$t^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

すなわち，$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$ であり，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$

$$\begin{aligned}(\sin\theta-\cos\theta)^2&=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\\&=1-2\sin\theta\cos\theta\\&=1-2\cdot\frac{t^2-1}{2}\\&=2-t^2\end{aligned}$$

ゆえに，① は，$k^4-2tk^2+2-t^2=0$ となる。

ここで，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ であり，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるとき，

$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ であることから，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq1$

辺々 $\sqrt{2}$ をかければ，$1\leqq t\leqq\sqrt{2}$

以上から，$x=k$ が ① の解となるとき，$k^4-2tk^2+2-t^2=0$，すなわち

$$t^2+2k^2t-k^4-2=0 \quad \cdots②$$

を満たす t が $1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ の範囲に少なくとも 1 つ存在する。$\cdots(*)$

$f(t)=t^2+2k^2t-k^4-2$ とおく。

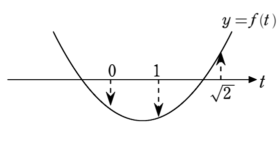
② の判別式を D とおくと，

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=k^4-(-k^4-2)\\&=2k^4+2\\&>0\end{aligned}$$

であり，② は異なる 2 つの実数解をもつ。

$f(0)=-k^4-2<0$ であることに注意すると

$$(*) \iff \begin{cases} f(1)\leqq0 & \cdots(ア)\\ f(\sqrt{2})\geqq0 & \cdots(イ)\end{cases} \quad \text{((図 1 参照))}$$



(図 1)

(ア) について

$$\begin{aligned}f(1)&=1+2k^2-k^4-2\\&=-(k^2-1)^2\end{aligned}$$

より，(ア) は常に成り立つ。

(イ) について

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}) &= 2+2\sqrt{2}k^2-k^4-2 \\ &= -k^2(k^2-2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

よって，$-k^2(k^2-2\sqrt{2})\geqq 0$，すなわち $k^2(k^2-2\sqrt{2})\leqq 0$

これを k^2 についての 2 次不等式と見なせば，$0\leqq k^2\leqq 2\sqrt{2}$

これより，$-\sqrt[4]{8}\leqq k\leqq \sqrt[4]{8}$ を得る。

以上から，実数解 $x\ (=k)$ のとり得る値の範囲は

$$-\sqrt[4]{8}\leqq x\leqq \sqrt[4]{8}\ \cdots 答$$

【総括】

原題は

0 以上の実数 s，t が $s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，方程式
$$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$$
の解のとる値の範囲を求めよ。

という問題でしたが，本質的には同じです。

最後に，逆像法一辺倒になっても … ということについても触れておきたいと思います。

【参考類題】

θ が $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を変化するとき，関係式
$$x^2-6(\sin\theta)x+6\sin^2\theta-3\cos 2\theta=0$$
を満たす実数 x のとり得る値の範囲を求めよ。

< '94 関西学院大 >

【解答】

$$\begin{aligned} x &= 3\sin\theta\pm\sqrt{9\sin^2\theta-(6\sin^2\theta-3\cos 2\theta)} \\ &= 3\sin\theta\pm\sqrt{3\sin^2\theta+3(1-2\sin^2\theta)} \\ &= 3\sin\theta\pm\sqrt{3(1-\sin^2\theta)} \\ &= 3\sin\theta\pm\sqrt{3\cos^2\theta} \\ &= 3\sin\theta\pm\sqrt{3}\cos\theta \quad \left(\because 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2\sqrt{3}\sin\left(\theta\pm\frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{2}{3}\pi$，$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{\pi}{3}$

これより，$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq 1 \\ -\dfrac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

よって，x のとり得る値の範囲は

$$\sqrt{3}\leqq x\leqq 2\sqrt{3},\ -\sqrt{3}\leqq x\leqq 3$$

すなわち，$-\sqrt{3}\leqq x\leqq 2\sqrt{3}\ \cdots 答$