(1)　$a$ がすべての実数を動くとき，

$$円\ C_a : (x-a)^2+(y-a)^2=a^2+1$$

が動く範囲を図示せよ。

(2)　$a$ が 0 以上のすべての実数を動くとき，$C_a$ が動く範囲を図示せよ。

＜ '94 北海道大 ＞

**【戦略】**

(1)　**中心，半径が同時に動くため，$a$ の動きに応じて $C_a$ の動きを直接目で追っていくことは厳しいでしょう。**
**（イメージは掴めるとは思いますが，境界線などの細かな情報を追うには限界があるでしょう。）**

**そこで，逆に題意の通過領域を $D$ としたとき**

**どんな $(X, Y)$ なら $D$ に入っているんだろう？**

**と考えます。**

**例えば，$(2, 3)$ って $D$ に入ってる？と考えてみます。**

**$(2, 3)$ が $D$ に入っているかどうかというのは**

**$(2, 3)$ を通るように $C_a$ の $a$ を仕組めるかどうか**

**にかかってきます。**

**つまり，$(2-a)^2+(3-a)^2=a^2+1$ を満たす $a$，すなわち**

$$a^2-10a+12=0$$

**を満たす $a$ をもってくれば $(2, 3)$ を通るように仕組めるわけです。**

**この場合，$a=5\pm\sqrt{13}$ と，汚いですが実数として存在しますから $C_a$ が $(2, 3)$ を通るように仕組めるということになります。**

**$(1, 3)$ って $D$ に入ってる？　$(-1, 5)$ って $D$ に入ってる？**

**でも考え方は一緒で，このように「しらみつぶせば」$D$ に入ってる点の集合，すなわち $D$ が得られることになります。**

**ただ，キリがないので**

**$(X, Y)$ って $D$ に入ってる？　入れるとしたらどんな $(X, Y)$？**

**と，考えます。**

**そうなると，$(X-a)^2+(Y-a)^2=a^2+1$，すなわち**

$$a^2-2(X+Y)a+X^2+Y^2-1=0 \cdots (*)$$

**を満たすような実数 $a$ が存在するような $X, Y$ を考えればよいわけです。**

(2)　**(1) 同様に考えれば，今度は $(*)$ を満たす $a$ が 0 以上の実数として少なくとも 1 つ存在するような $X, Y$ の条件に付いて考えればよいことになります。**

【解答】

(1)　題意の通過領域を $D$ とする。

点 $(X, Y)$ が $D$ に含まれるとは

円 $C_a$ が $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2+1$ が $(X, Y)$ を通るように実数 $a$ をとれる，すなわち

$$a^2-2(X+Y)a+X^2+Y^2-1=0 \cdots (*)$$

を満たす $a$ が実数として存在するような $X, Y$ が満たすべき条件を求める。

$a$ についての 2 次方程式 $(*)$ の判別式を $D'$ とすると，

$$\frac{D'}{4}=(X+Y)^2-(X^2+Y^2-1)$$
$$=2XY+1$$

$\dfrac{D'}{4}\geqq 0$ より，$2XY+1\geqq 0$，すなわち

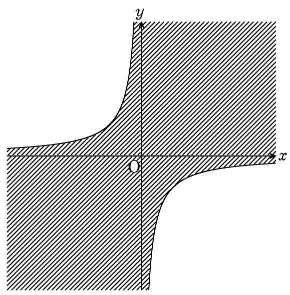
$$XY\geqq -\frac{1}{2} \cdots (☆)$$

$X=0$ のとき，(☆) は $0\cdot Y\geqq -\dfrac{1}{2}$ となり，全ての実数 $Y$ に対して (☆) は成立する。

$X>0$ のとき，(☆) を満たす $X, Y$ の条件は $Y\geqq -\dfrac{1}{2X}$

$X<0$ のとき，(☆) を満たす $X, Y$ の条件は $Y\leqq -\dfrac{1}{2X}$

以上から円 $C_a$ の通過領域は (図 1) の斜線部分。
( ただし，境界線を含む。)




(図 1)

(2) 題意の通過領域を $E$ とする。

点 $(X,Y)$ が $E$ に含まれるとは

円 $C_a$ が $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2+1$ が $(X,Y)$ を通るように
0 以上の実数 $a$ をとれる，すなわち

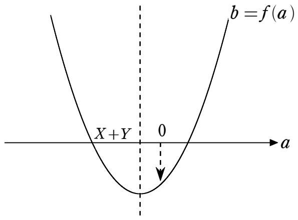
$$a^2-2(X+Y)a+X^2+Y^2-1=0 \quad \cdots (*)$$

を満たす $a$ が 0 以上の実数として少なくとも 1 つ存在するような
$X$，$Y$ が満たすべき条件を求める。

$$\begin{aligned} f(a) &= a^2-2(X+Y)a+X^2+Y^2-1 \\ &= \{a-(X+Y)\}^2-2XY-1 \end{aligned}$$

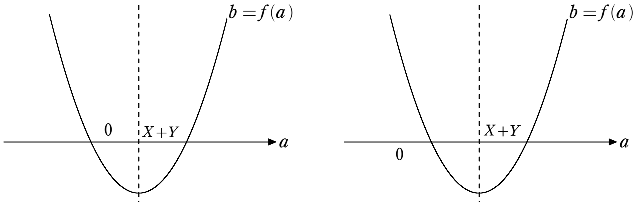
とする。

(i) $X+Y \leqq 0$ のとき，すなわち $Y \leqq -X$ のとき




$f(0) \leqq 0$，すなわち $X^2+Y^2-1 \leqq 0$ となればよく，$X^2+Y^2 \leqq 1$

(ii) $X+Y>0$ のとき，すなわち $Y>-X$ のとき

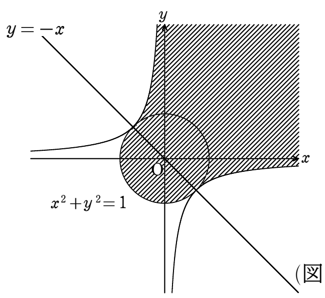



$f(a)=0$ が実数解をもちさえすれば，重解，もしくは大きい方の解は 0 より大きくなる。

よって，(☆) を満たせばよい。

**(図 1) のうちの $y>-x$ の部分を考えればよいということになります。**

以上 (i)，(ii) より $a \geqq 0$ で動いたときの円 $C_a$ の通過領域は以下の (図 2) の斜線部分。
( ただし，境界線を含む。)




(図 2)

【総括】

通過領域について，直接目で追いきれないときも逆像法は有効な手段となります。

逆像法の考え方が有効にはたらく場面の 1 つとして通過領域というテーマがあるということはおさえておきましょう。