実数 x，y が $x^2+y^2 \leqq 1$ を満たしながら変化するとする。

(1)　$s=x+y$，$t=xy$ とするとき，点 $(s,\ t)$ の動く範囲を図示せよ。

(2)　負でない定数 $m \geqq 0$ をとるとき，$xy+m(x+y)$ の最大値，最小値を m を用いて表せ。

＜ ’05 東京工業大 ＞

【戦略】

(1)　**例えば，$(s,\ t)$ は $(1,\ 0)$ になれる？　と考えてみます。**

それは，$x^2+y^2 \leqq 1$ を満たしつつ，$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=0 \end{cases}$ を満たす x，y が存在するかどうかにかかってきます。

解と係数の関係から x，y は $X^2-X=0$ の 2 解ですから $(x,\ y)=(1,\ 0),\ (0,\ 1)$ であり，これらは $x^2+y^2 \leqq 1$ を満たします。

つまり，$(s,\ t)$ は $(1,\ 0)$ になれるということが言えます。

続いて $(s,\ t)$ は $(1,\ 2)$ になれる？　と考えてみます。

先ほど同様 $x^2+y^2 \leqq 1$ を満たしつつ $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=2 \end{cases}$ となる x，y が存在するかどうかが問題です。

x，y は $X^2-X+2=0$ の 2 解で，これを解くと $X=\dfrac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ と，実数として存在しないため，$(s,\ t)$ は $(1,\ 2)$ にはなれないということになります。

解と係数の関係から出てくる 2 次方程式が実数解をもてばよいだけとも限りません。

例えば，$(s,\ t)$ は $(1,\ -2)$ になれる？　と考えると

x，y は $X^2-X-2=0$ の解で，$(x,\ y)=(2,\ -1),\ (-1,\ 2)$ と実数として存在しますが，肝心かなめの $x^2+y^2 \leqq 1$ を満たしていません。

こうしてみると，しらみつぶしの考え方である「逆像法」の出番でしょう。

$(s,\ t)$ が $(u,\ v)$ になれる？ なれるとしたらどんな $(u,\ v)$？

としらみつぶす方向で考えます。

上記の実験から，$X^2-uX+v=0$ が実数解として存在し，$x^2+y^2 \leqq 1$ というハードルをクリアーしているかどうかについては $(x+y)^2-2xy \leqq 1$ と見て，$u^2-2v \leqq 1$ とすればよいでしょう。

ここで，一つレベルアップしてほしいのですが，この議論は $(u,\ v)$ だろうが $(a,\ b)$ だろうが，$(\alpha,\ \beta)$ だろうが

「しらみつぶすときに使用する文字は何だってよい」

ので，$(s,\ t)$ のまま考えます。

(2)　**与えられた $xy+m(x+y)$ は，$ms+t$ と表せることになります。**

よって，$(s,\ t)$ が (1) で得た領域内を動くときの，$ms+t$ の最大値と最小値を求めればよいことになります。

$ms+t=1$ になれる？　という問題に対しては

「$ms+t=1$ となる $(s,\ t)$ 集まれ！」

と呼びかけます。

この呼びかけに対して集まってくるのは，$t=-ms+1$ という直線です。

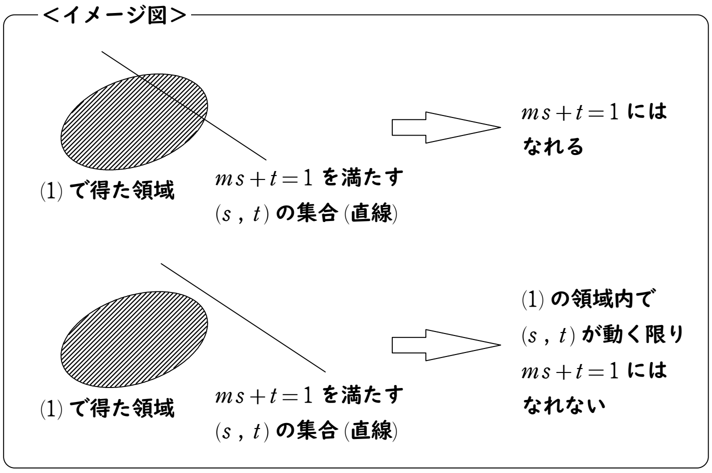
一方，$(s,\ t)$ は (1) の領域内にいないといけません。

つまり，$ms+t=1$ になれるかどうかについては

$t=-ms+1$ を満たす $(s,\ t)$ 集まれと呼びかけて集まってくる点たちの中に (1) の領域内に存在するものが入っているかどうか

ということが問題になってきます。

＜イメージ図＞



$ms+t=2$ になれる？　$ms+t=-\dfrac{1}{3}$ になれる？ ……

も全く同じ考え方です。

そこで，

$ms+t=k$ になれる？　なれるとしたらどんな k？

というしらみつぶしの考え方である逆像法で考えていきます。

【解答】

(1)　$x^2+y^2 \leqq 1$ は $(x+y)^2-2xy \leqq 1$ と変形できるため，$s^2-2t \leqq 1$

すなわち，$t \geqq \dfrac{1}{2}s^2-\dfrac{1}{2}$ …①

一方，解と係数の関係から，x，y は 2 次方程式

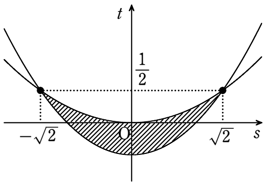
$$X^2-sX+t=0 \ \cdots (*)$$

の解であり，x，y は実数として存在するため，$(*)$ の判別式を D とすると

$$D=s^2-4t$$

であり，$D \geqq 0$ であるから，$s^2-4t \geqq 0$，すなわち $t \leqq \dfrac{s^2}{4}$ …②

以上から，①，② から，(s, t) の動き得る範囲は以下の斜線部。(ただし，境界線を含む)



(2)　s，t が (1) の領域内の値を動くとき，$ms+t$ の最大値と最小値を求めればよい。

$ms+t=k$ とおくと，$t=-ms+k$ …③

③ を満たす (s, t) の集合は直線を表し，直線 ③ と (1) の領域が共有点をもつなかでの t 切片 k の最大最小を求める。

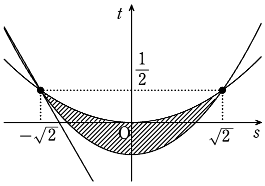
$t=\dfrac{1}{2}s^2-\dfrac{1}{2}$ について，$\dfrac{dt}{ds}=s$ …(☆) であるため，

$\left(-\sqrt{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ における $t=\dfrac{1}{2}s^2-\dfrac{1}{2}$ の接線の傾きは $-\sqrt{2}$ であることに注意する。

＜最小値について＞

(i)　$-m \leqq -\sqrt{2}$，すなわち $m \geqq \sqrt{2}$ のとき

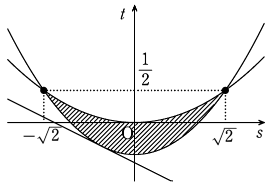
③ が $\left(-\sqrt{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ を通るときの k が最小



つまり，$s=-\sqrt{2}$，$t=\dfrac{1}{2}$ で k は最小値 $-\sqrt{2}m+\dfrac{1}{2}$ をとる。

(ii)　$-\sqrt{2} \leqq -m \leqq 0$，すなわち $0 \leqq m \leqq \sqrt{2}$ のとき

③ が $t=\dfrac{1}{2}s^2-\dfrac{1}{2}$ に接するときの k が最小。



このとき，$\left(s, \dfrac{1}{2}s^2-\dfrac{1}{2}\right)$ における接線が ③ であると考えて

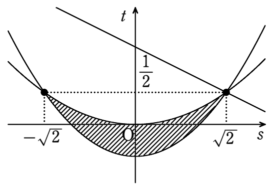
この接線の傾きは (☆) より s であるため，

$$s=-m$$

すなわち，$s=-m$，$t=\dfrac{1}{2}m^2-\dfrac{1}{2}$ のとき k は最小となり

$$k=m\cdot(-m)+\left(\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}$$

＜最大値について＞



③ が $\left(\sqrt{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ を通るときの k が最大

つまり，$s=\sqrt{2}$，$t=\dfrac{1}{2}$ で k は最大値 $\sqrt{2}m+\dfrac{1}{2}$ をとる。

$$\text{以上から，}\begin{cases}\text{最大値は } \sqrt{2}m+\dfrac{1}{2} \\ \text{最小値は } \begin{cases} m \geqq \sqrt{2} \text{ のとき } -\sqrt{2}m+\dfrac{1}{2} \\ 0 \leqq m \leqq \sqrt{2} \text{ のとき } -\dfrac{1}{2}m^2-\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{cases} \cdots \text{答}$$

【総括】

(1) は類題も多く，「何となく」理解をしていた人も多いと思います。

ただ，逆像法の考え方にまで思いを馳せて解いていた人は案外多くないと思います。

(2) の線形計画法についても，

「$=k$ とおいて『バーー』とズラしていくやつ」

と覚えていたかもしれませんが，根っこにあるのは逆像法の考え方です。

$=1$ になるかな？　$=2$ になるかな？　…

というしらみつぶしの考え方を「視覚的」に考えているだけです。

注意

「線形性 (linearity)」という言葉は直線 (line) 的な性質という意味で，
線形計画法も，本来は 1 次式に関する最適化問題に対して用いるのですが，
「$=k$ とおいて，図形的に捉えて交点をもつように k の範囲を求める問題全般」を線形計画法と一括りで呼んでいる人が多いです。

私もいちいち説明が面倒くさいので線形計画法と呼んでしまいますが，
呼ぶたびに違和感を覚えます。でも面倒くさいので呼んじゃいます。