

逆像法1【最大最小問題への応用】

等式 $x^2 - 6xy + 12y^2 = 1$ を満たす正の実数 x, y を考える。

- (1) $x + 3y$ の最大値を求めよ。
- (2) xy の最大値を求めよ。

< '13 東京理科大 改 >

【戦略】

従属2変数関数の最大値を求める問題です。

文字消去ができればいいのですが、今回の場合、文字消去が容易ではありません。

やろうと思うと色々考えられますが、ここでは「逆像法」という手法に絞って考えていきます。

逆像法は「しらみつぶしの考え方」と思って下さい。

今回の(1)を例にとると、例えば $x + 3y = 1$ になれる？と考えてみます。

$x^2 - 6xy + 12y^2 = 1$ を満たしつつ、 $x + 3y = 1$ になれる？

という話ですから、 $\begin{cases} x^2 - 6xy + 12y^2 = 1 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$ という連立方程式が実数解をもつかどうかという話になってきます。

$x + 3y = \frac{1}{3}$ になれる？ $x + 3y = \sqrt{5}$ になれる？…も全て同じで、

なれるか、なれないかをしらみつぶしに全て調べきる

ということができれば、理屈上 $x + 3y$ のとり得る値を調べつくせるわけです。

とは言え、本当に全てを調べるのは難しいわけですが、上のような気持ちで

$x + 3y = k$ になれる？ なれるとしたらどんな k ?

と考えていきます。

そうなってくると、 $\begin{cases} x^2 - 6xy + 12y^2 = 1 \\ x + 3y = k \end{cases}$ という連立方程式が実数解をもつかどうか問題なので、実数解をもつような k が満たすべき条件を考えていきます。

今回は、さらに「正の実数解」という条件もあります。

それについては、まずは実数解をもつような k が満たすべき条件を考えていき、そのときの实数解の組が正かどうかを個別に検証します。

(2)についても同様で、 $xy = 1$ になれる？ $xy = 2$ になれる？…という気持ちで

$xy = u$ になれる？ なれるとしたらどんな u ?

と考えます。

【解答】

- (1) $x + 3y = k$ とおく。

このとき、 $x = k - 3y$ であり、これを与えられた等式に代入すると

$$(k - 3y)^2 - 6y(k - 3y) + 12y^2 = 1$$

整理すると、 $39y^2 - 12ky + k^2 - 1 = 0 \dots \textcircled{1}$

①の2次方程式の判別式を D として

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (-6k)^2 - 39(k^2 - 1) \\ &= -3k^2 + 39 \end{aligned}$$

y は実数として存在するため、 $-3k^2 + 39 \geq 0$ 、すなわち $k^2 \leq 13$

これより、 $-\sqrt{13} \leq k \leq \sqrt{13}$ である。

$k = \sqrt{13}$ のとき、①の重解は $y = \frac{6k}{39} = \frac{2\sqrt{13}}{13} (> 0)$

と、 y は正の実数として存在する。

このとき、 $x = k - 3y = \sqrt{13} - \frac{6\sqrt{13}}{13} = \frac{7\sqrt{13}}{13} (> 0)$

と、 x も正の実数として存在する。

ゆえに、 $x + 3y (= k)$ のとり得る値の最大値は $\sqrt{13} \dots \textcircled{\text{答}}$

- (2) $xy = u$ とおく。

y が正の実数として存在するとき、 $x = \frac{u}{y}$ で、これを与えられた等式に代入すると

$$\left(\frac{u}{y}\right)^2 - 6y \cdot \frac{u}{y} + 12y^2 = 1$$

整理すると $12y^4 - (6u + 1)y^2 + u^2 = 0 \dots \textcircled{2}$

$y^2 = Y$ とおくと、 $12Y^2 - (6u + 1)Y + u^2 = 0 \dots \textcircled{2}'$

②を満たす正の実数 y が存在するための条件は、②'を満たす正の実数 Y が存在することである。

②'の判別式を D' とすると

$$\begin{aligned} D' &= \{-(6u + 1)\}^2 - 4 \cdot 12 \cdot u^2 \\ &= -12u^2 + 12u + 1 \end{aligned}$$

$D' \geq 0$ より、 $-12u^2 + 12u + 1 \geq 0$ すなわち $12u^2 - 12u - 1 \leq 0$

これより、 $\frac{3 - 2\sqrt{3}}{6} \leq u \leq \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6}$ である。

$u = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}$ のとき, ②の重解は

$$\begin{aligned}
 Y &= \frac{6u+1}{2 \cdot 12} \\
 &= \frac{6 \cdot \frac{3+2\sqrt{3}}{6} + 1}{24} \\
 &= \frac{4+2\sqrt{3}}{24} \\
 &= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{24}
 \end{aligned}$$

このとき, 正の実数 y は $y = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{12}$ として存在する。

また,

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{u}{y} \\
 &= \frac{\frac{3+2\sqrt{3}}{6}}{\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{12}} \\
 &= \frac{6+4\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+\sqrt{6}} \\
 &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} (>0)
 \end{aligned}$$

と, x も正の実数として存在する。

ゆえに, $xy (=u)$ のとり得る値の最大値は $\frac{3+2\sqrt{3}}{6}$... 罫

【総括】

従属2変数関数の最大最小問題で, 文字消去困難な場合, 逆像法は有力な手段の1つです。

「 $=k$ とおく方法」とぶっきらぼうに覚えるのではなく,

「しらみつぶすんだ」

という気持ちが背景にあるということをおさえておくと自分のモノになりやすいと思います。

<逆像法の名前の由来>

例えば (2) でいうと, 本来は

「 x, y が決まって, xy という値が決まる」

という流れです。

今回の話を例にとり

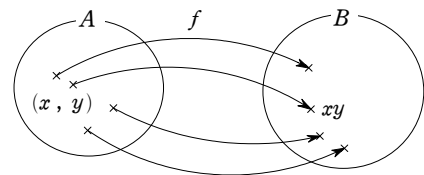
$$A = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0, x^2 - 6xy + 12y^2 = 1\}$$

$$B = \{xy \mid (x, y) \in A\}$$

$$f : A \rightarrow B ((x, y) \mapsto xy)$$

という, 集合 A の要素から集合 B の要素に対応させる写像 f を考えます。

このように集合 A の各元 (x, y) に対して f を施して得られる xy という値の集合 B を f による「像」といいます。



この像を作る基となる集合(ここでいうと集合 A)を「逆像」と言います。

今回の考え方は $xy = 1$ になれる? $xy = 2$ になれる? …… というように

「 xy という値を与えたときに, (x, y) という組(逆像)が存在するか」

というものでした。

逆像が存在するかどうか注目する方法なので, 逆像法と呼ばれています。