n を正の整数とする。2^n+1 は 15 で割り切れないことを示せ。

＜ '99 お茶の水女子大 ＞

【戦略】

自然数 n に関する証明なので，帰納法が思いついたかもしれませんが，闇雲に帰納法を使っても失敗します。

失敗例

$f(n)=2^n+1$ とする。

(i)　$n=1$ のとき　$f(1)=3$ となり，$f(1)$ は 15 で割り切れない。

(ii)　$n=k$ $(k=1,2,\cdots)$ のとき

$2^k+1 \fallingdotseq 15M$ (M は整数) と仮定する。

$$\begin{aligned} f(k+1)&=2^{k+1}+1\\ &=2\cdot 2^k+1\\ &\fallingdotseq 2(15M-1)+1 \text{ (仮定より)} \end{aligned}$$

よって，$f(k+1) \fallingdotseq 15(2M-1)+14$

我々が欲しかった結論は $f(k+1) \fallingdotseq 15\cdot$(整数) ということでした。

つまり，「余り 0」を否定したかったわけです。

しかし，「15 で割った余りが 14 になりません。」が言えただけでは「余り 0 」が否定できたことにならないわけで，失敗しました。

リカバリー策としては，$f(n)$ を 15 で割った余りを実際に求めて実験してみると活路が開けるでしょう。

以下，合同式の法を 15 とすると

$f(1)=3\equiv 3$　　$f(2)=5\equiv 5$　　$f(3)=9\equiv 9$　　$f(4)=17\equiv 2$

$f(5)=33\equiv 3$　　$f(6)=65\equiv 5$　　$f(7)=129\equiv 9$　　$f(8)=257\equiv 2$

と，$f(n)$ を 15 で割った余りは 3，5，9，2 の繰り返しだと分かります。

つまり，余り 0 は登場しません。

これより，$f(n)$ を 15 で割った余りは 3，5，9，2 の繰り返し であることを証明します。

これを証明するということは，「4 つ先の 15 で割った余りが等しい」ことを証明することに他なりません。

数式的には $f(n+4)\equiv f(n)$ であることを示せばよいわけです。

そこで，$f(n+4)-f(n)\equiv 0$，すなわち $f(n+4)-f(n)$ が 15 の倍数であることを証明するという方向性を睨みます。

【解答】

$f(n)=2^n+1$ とする。

以下，合同式の法は 15 とする。

$f(1)=3\equiv 3$　　$f(2)=5\equiv 5$　　$f(3)=9\equiv 9$　　$f(4)=17\equiv 2$

ここで，

$$\begin{aligned} f(n+4)-f(n)&=(2^{n+4}+1)-(2^n+1)\\ &=2^4\cdot 2^n-2^n\\ &=(2^4-1)\cdot 2^n\\ &=15\cdot 2^n\\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

よって，$f(n+4)\equiv f(n)$

ゆえに，

$f(1),f(5),f(9),\cdots$ を 15 で割った余りは 3

$f(2),f(6),f(10),\cdots$ を 15 で割った余りは 5

$f(3),f(7),f(11),\cdots$ を 15 で割った余りは 9

$f(4),f(8),f(12),\cdots$ を 15 で割った余りは 2

ということになり，$n=1,2,3,\cdots$ に対して，$f(n)$ を 15 で割った余りは 0 とならず，$f(n)$ は 15 で割り切れない。

以上から，$n=1,2,3,\cdots$ に対して 2^n+1 は 15 で割り切れない。

【総括】

細々とした別解などはあると思います。

$15=3\cdot 5$ とみて，

$2^n\equiv\begin{cases}2 & (n=1,3,5,\cdots)\\ 1 & (n=2,4,6,\cdots)\end{cases}$ (mod 3) より，

$$f(n)\equiv\begin{cases}0 & (n=1,3,5,\cdots)\\ 2 & (n=2,4,6,\cdots)\end{cases} \pmod 3$$

一方，$2^n\equiv\begin{cases}1 & (n=4,8,12,\cdots)\\ 2 & (n=1,5,9,\cdots)\\ 3 & (n=3,7,11,\cdots)\\ 4 & (n=2,6,10,\cdots)\end{cases}$ (mod 5) ですから

$2^n\equiv\begin{cases}2 \text{ または } 3 & (n=1,3,5,\cdots)\\ 1 \text{ または } 4 & (n=2,4,6,\cdots)\end{cases}$ (mod 5)，すなわち

$$f(n)\equiv\begin{cases}3 \text{ または } 4 & (n=1,3,5,\cdots)\\ 0 \text{ または } 2 & (n=2,4,6,\cdots)\end{cases} \pmod 5$$

ですから，n が偶数のときは $f(n)$ が 3 の倍数とならず，n が奇数のときは $f(n)$ が 5 の倍数とならないため，自然数 n に対して，$f(n)$ は 3，5 で同時に割り切れることがなく，15 では割り切れないということが言えます。

ただ，上記の行間を埋めるために証明まで含めてやるとなると，結局【解答】のような話となるため，このように分割するのは二度手間です。

【参考】

自然数の累乗で割った余りは必ず周期性をもちます。

例： 3^n を 10 で割った余り

10 で割った余りを「10 進法における 1 の位」と見れば

$$3 ,\ 9 ,\ 27 ,\ 81 ,\ 243 ,\ 729 ,\ \cdots$$

1 の位だけ見ると

$$3 ,\ 9 ,\ 7 ,\ 1 ,\ \boxed{3} ,\ 9 ,\ \cdots$$

となります。

1 の位は
以前と同じ数が登場すれば
同じことが繰り返されます。

本問の 2^n+1 ですが，周期性をもつかどうかにおいて「 $+1$ 」は関係ありません。(本問は 3 , 5 , 9 , 2 を繰り返しましたが，$+1$ がなければ 2 , 4 , 8 , 1 を繰り返すだけです。)

そこで，2^n を 15 で割った余りの周期性を考えてみます。

先ほど同様に

15 で割った余りを「15 進法における 1 の位」

と見ます。

15 進法ということは「15 個しか数を使わない」ということです。

ということは，最大でも 16 回目には以前と同じ数が登場することになります。（16 回目以前に同じ数が登場することもあるでしょうが，ここで言いたいのは，いつか必ず同じ数が登場するということです。）

同じ数が登場すれば繰り返しが起こるので，

2^n を 15 で割った余り ($=2^n$ の 15 進法における 1 の位)

は周期性をもちます。

今述べたことは 15 進法に関わらず，何進法でも言えることです。

このことから，自然数の累乗を何かで割った余りは必ず周期性をもつことが言えます。