a は正の定数とする。点 $(x\,,\,y)$ は条件 $a|x|+|y|\leqq a$ をみたす。

(1)　$y-(x+1)^2$ の最小値を求めよ。

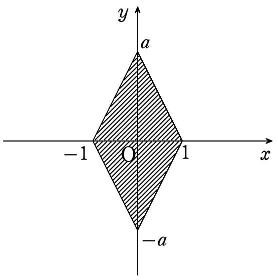
(2)　$y-(x+1)^2$ の最大値を求めよ。

＜ '02 一橋大 ＞

【戦略 1】

まずは $a|x|+|y|\leqq a$ が表す領域を図示します。(この領域を D とします。)

すると



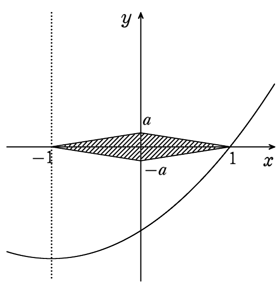
となります。

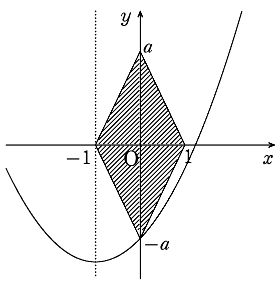
この領域内を $(x\,,\,y)$ が動くときの $y-(x+1)^2$ の最大最小を考えるわけで方針としては「線形計画法」が第一感です。

そこで，$y-(x+1)^2=k$ とおき，この k の最大最小を考えるわけです。

図形的には $y=(x+1)^2+k$ という放物線が領域 D と共有点をもつような y 切片 k の最大最小を捉えればよいことになります。

(1)　**放物線を下げよう下げようとしたときの限界を考えると**





(i)　$(1\,,\,0)$ **を通るときが限界というケース**

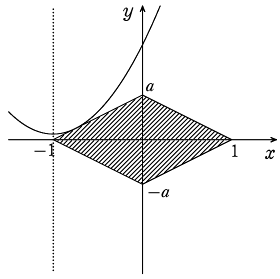
(ii)　$(0\,,\,-a)$ **を通るときが限界というケース**

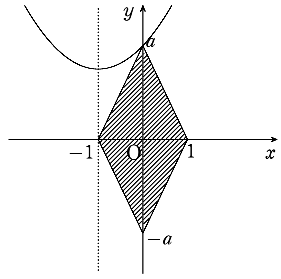
の 2 パターン考えられます。

この放物線が $(1\,,\,0)$ を通るとき $k=-4$ ですから，$y=(x+1)^2-4$ で，これが $(0\,,\,-a)$ も通るとなると，$-a=-3$，すなわち $a=3$ です。

この値を境に場合分けをすればよいでしょう。

(2)　**今度は放物線を上げよう上げようということを考えます。**





(iii)　$y=ax+a$ **と接するときが限界というケース**

(iv)　$(0\,,\,a)$ **を通るときが限界というケース**

の 2 パターン考えられます。

(iii) **は，$-1<x<0$ の範囲で接するという条件付きです。**

$y=ax+a$ **と放物線** $y=(x+1)^2+k$ **を連立すると**

$(x+1)^2+k=ax+a$，**すなわち** $x^2-(a-2)x+k-a+1=0$

この 2 次方程式の重解が接点の x 座標で，その重解は $x=\dfrac{a-2}{2}$ **です。**

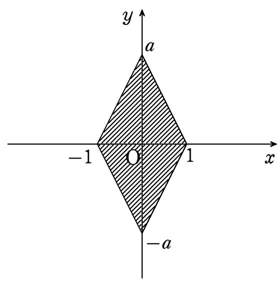
$-1<\dfrac{a-2}{2}<0$，**すなわち** $0<a<2$ **のときに (iii) が起こります。**

【解 1】

$a|x|+|y|\leqq a$ について，

$$\begin{cases} x\geqq 0\,,\,y\geqq 0 \text{ のとき}\,,\,ax+y\leqq a \iff y\leqq -ax+a \\ x\leqq 0\,,\,y\geqq 0 \text{ のとき}\,,\,-ax+y\leqq a \iff y\leqq ax+a \\ x\leqq 0\,,\,y\leqq 0 \text{ のとき}\,,\,-ax-y\leqq a \iff y\geqq -ax-a \\ x\geqq 0\,,\,y\leqq 0 \text{ のとき}\,,\,ax-y\leqq a \iff y\geqq ax-a \end{cases}$$

であり，これを図示すると



この領域を D とする。

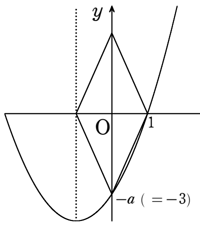
$y-(x+1)^2=k$ とおくと，$y=(x+1)^2+k$ …①

① を満たす $(x\,,\,y)$ の集合は放物線を表し，① と領域 D が共有点をもつ中での y 切片 k の最大最小を求めればよい。

このときの k の最大値を k_{Max}，最小値を k_{min} と表す。

(1)　$a=3$ のとき

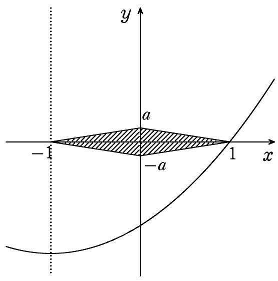
$y=(x+1)^2-4$ は
$(0,\ -a)$, $(1,\ 0)$ を
同時に通る。



(i)　$0<a\leqq 3$ のとき

① が $(1,\ 0)$ を通るときの k が最小

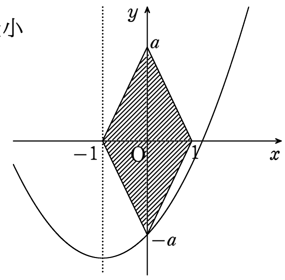
$k_{min}=0-(1+1)^2$
$\quad=-4$



(ii)　$a\geqq 3$ のとき

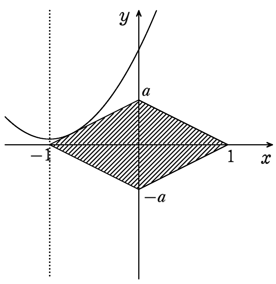
① が $(0,\ -a)$ を通るときの k が最小

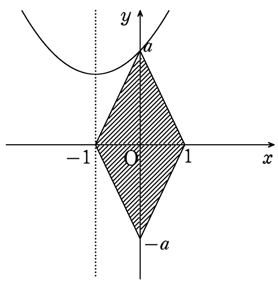
$k_{min}=-a-(0+1)^2$
$\quad=-a-1$



以上から求める最小値は $\begin{cases} a\geqq 3 \text{ のとき } -a-1 \\ 0<a\leqq 3 \text{ のとき } -4 \end{cases}$ …答

(2)





① が $-1<x<0$ の範囲で $y=ax+a$ と接するときの k

または

① が $(0,\ a)$ を通るときの k

で最大となり得る。

(iii)　① が $-1<x<0$ の範囲で $y=ax+a$ と接するとき

$y=ax+a$ と放物線 $y=(x+1)^2+k$ を連立すると

$(x+1)^2+k=ax+a$，すなわち
$$x^2-(a-2)x+k-a+1=0$$

判別式について，$\{-(a-2)\}^2-4(k-a+1)=0$

これより，$k=\dfrac{a^2}{4}$

また，この 2 次方程式の重解が接点の x 座標で，その重解は
$$x=\frac{a-2}{2}$$

$-1<x<0$ の範囲で接するため，$-1<\dfrac{a-2}{2}<0$，すなわち
$$0<a<2$$

以上から，$0<a<2$ のとき，$k_{\mathrm{Max}}=\dfrac{a^2}{4}$

(iv)　① が $(0,\ a)$ を通るとき

$a=(0+1)^2+k$，すなわち，$k=a-1$

$a\geqq 2$ のとき，$k_{\mathrm{Max}}=a-1$

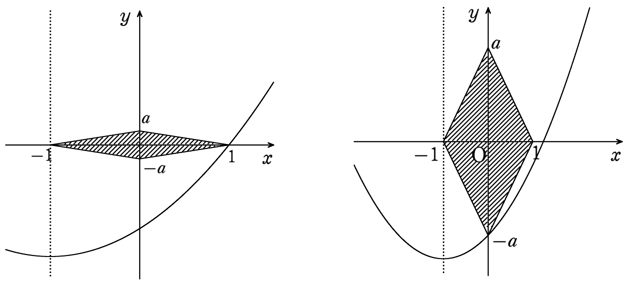
以上から，求める最大値は $\begin{cases} 0<a<2 \text{ のとき } \dfrac{a^2}{4} \\ a\geqq 2 \text{ のとき } a-1 \end{cases}$ …答

【戦略 2】

【解 1】の方針では図形的な場合分けが発生し，煩わしいことは否めません。

ここで，少し荒業な考え方をします。

(1)



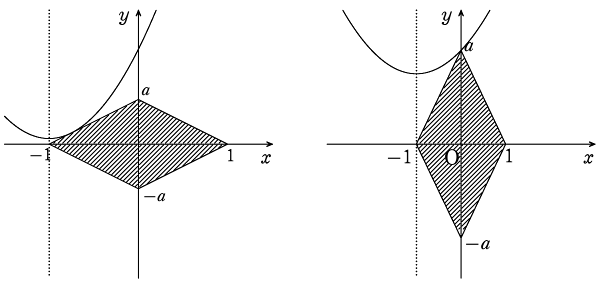
いずれにせよ，線分 $y=ax-a$ $(0\leqq x\leqq 1)$ **上の点で最小となり得ることになります。**

そこで，$(t\ ,\ at-a)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ **とすると**

$$\begin{aligned} k&=y-(x+1)^2\\ &=at-a-(t+1)^2\\ &=-t^2+(a-2)t-a-1 \end{aligned}$$

ですから，$0\leqq t\leqq 1$ **におけるこの 2 次関数の最小値を求めるという非常に明確な問題に帰着します。**

(2)



いずれにせよ，線分 $y=ax+a$ $(-1\leqq x\leqq 0)$ **上の点で最大となり得ることになります。**

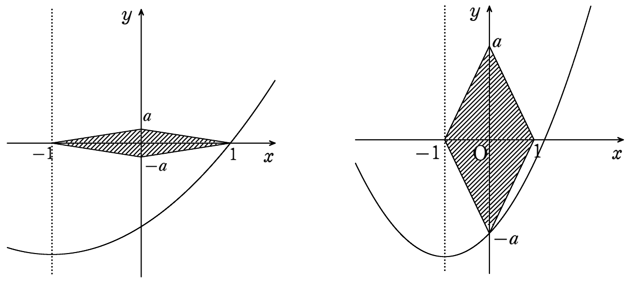
そこで，$(t\ ,\ at+a)$ $(-1\leqq t\leqq 0)$ **とすると**

$$\begin{aligned} k&=y-(x+1)^2\\ &=at+a-(t+1)^2\\ &=-t^2+(a-2)t+a-1 \end{aligned}$$

で，$-1\leqq t\leqq 0$ **におけるこの 2 次関数の最大値を求めればよいことになります。**

【解 2】

(1)



いずれにせよ，線分 $y=ax-a$ $(0\leqq x\leqq 1)$ 上の点で最小となり得る。

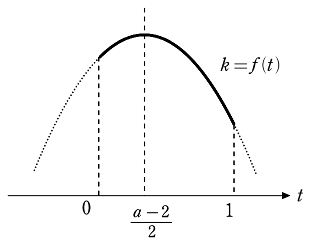
そこで，$(t\ ,\ at-a)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ とすると

$$\begin{aligned} k&=y-(x+1)^2\\ &=at-a-(t+1)^2\\ &=-t^2+(a-2)t-a-1 \end{aligned}$$

$0\leqq t\leqq 1$ におけるこの 2 次関数の最小値を求めればよい。

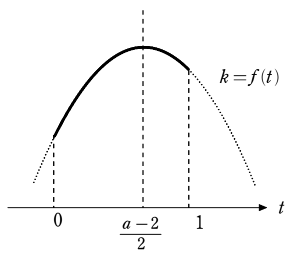
$$k=-\left(t-\frac{a-2}{2}\right)^2+\frac{1}{4}a^2-2a\ \ (\ =f(t)\ \text{とおく})$$

(i) $\dfrac{a-2}{2}\leqq\dfrac{1}{2}$，すなわち $0<a\leqq 3$ のとき



k の最小値は $f(1)=-1+(a-2)-a-1$
$\qquad\qquad\qquad\quad =-4$

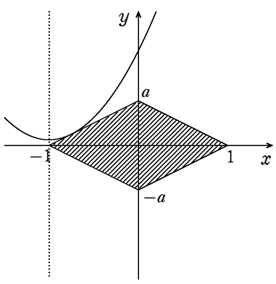
(ii) $\dfrac{a-2}{2}\geqq\dfrac{1}{2}$，すなわち $a\geqq 3$ のとき

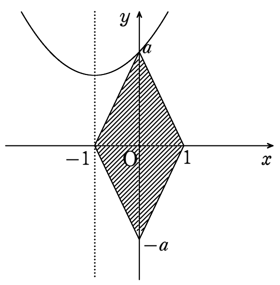


k の最小値は $f(0)=-a-1$

以上から求める最小値は $\begin{cases} a\geqq 3\ \text{のとき}\ -a-1\\ 0<a\leqq 3\ \text{のとき}\ -4 \end{cases}$ …答

(2)





いずれにせよ，線分 $y=ax+a$ $(-1\leqq x\leqq 0)$ 上の点で最大となり得る。

そこで，$(t\,,\ at+a)$ $(-1\leqq t\leqq 0)$ とすると

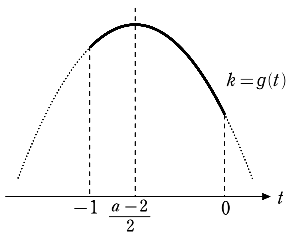
$$
\begin{aligned}
k&=y-(x+1)^2\\
&=at+a-(t+1)^2\\
&=-t^2+(a-2)t+a-1
\end{aligned}
$$

で，$-1\leqq t\leqq 0$ におけるこの 2 次関数の最大値を求めればよい。

$$k=-\left(t-\frac{a-2}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}\ \left(\ =g(t) \text{ とおく }\right)$$

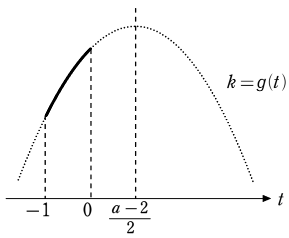
条件 $a>0$ より，$\dfrac{a-2}{2}>-1$ であることに注意する。

(iii)　$-1<\dfrac{a-2}{2}<0$，すなわち $0<a<2$ のとき



k の最大値は $g\left(\dfrac{a-2}{2}\right)=\dfrac{a^2}{4}$

(iv)　$\dfrac{a-2}{2}\geqq 0$，すなわち $a\geqq 2$ のとき



k の最大値は $g(0)=a-1$

以上から，求める最大値は $\begin{cases} 0<a<2 \text{ のとき } \dfrac{a^2}{4} \\ a\geqq 2 \text{ のとき } a-1 \end{cases}$ … 答

【総括】

線形計画法の考え方について，まずは王道的に考える【戦略 1】【解 1】の路線が大切です。

それをしっかりと自分のものとしたうえで，【戦略 2】【解 2】の

境界線上の点をパラメータ表示してしまう

という作戦もおさえておきましょう。

線形計画法の問題では，

最大・最小は境界線上の $(x\,,\ y)$ で起こる

に決まっています。

それを逆手にとって考えれば，題意が「純粋な最大最小問題」となり，非常に明確になります。