簡易ポーカーについての確率

赤，青，黄，白の 4 種類のカードが n 枚ずつあり，各色とも 1 から n $(n \geqq 4)$ までの番号がつけられている。この中から同時に 4 枚のカードを抜き取るとき，4 枚とも同じ色である確率を P_n，4 枚のカードの番号が全部異なっていて続いている確率を Q_n とする。

このとき，$P_n < Q_n$ となる最大の n を求めよ。

＜ '95 名古屋大 ＞

【戦略】

例えば 4 枚とも同じ赤となるのは

$$赤_{\bigcirc}，赤_{\bigcirc}，赤_{\bigcirc}，赤_{\bigcirc}$$

○ に入る数字の入れ方を考えればよいでしょう。

順番について無視すれば，$1 \sim n$ の中から 4 種類取って前から当てはめればよく，${}_n\mathrm{C}_4$ 通りということになります。

青，黄，白についても，それぞれ ${}_n\mathrm{C}_4$ 通りずつあることになります。

次に，例えば $\{1,2,3,4\}$ と連続する場合については

$$1_{\bigcirc}，2_{\bigcirc}，3_{\bigcirc}，4_{\bigcirc}$$

○に入る色の決め方を考えればよいでしょう。

$1_{赤}$ なのか，$1_{青}$ なのか，$1_{黄}$ なのか，$1_{白}$ なのか　4 通りあります。

$2_{\bigcirc}$，$3_{\bigcirc}$，$4_{\bigcirc}$ についても同様に 4 通りずつありますので

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4 【通り】$$

あるわけです。

$\{2,3,4,5\}, \{3,4,5,6\}, \cdots\cdots, \{n-3, n-2, n-1, n\}$ **についても同様に 4^4 通りずつあります。**

こうなってくると，$P_n < Q_n$ とは，数式的には $\dfrac{4 \cdot {}_n\mathrm{C}_4}{{}_{4n}\mathrm{C}_4} < \dfrac{4^4 (n-3)}{{}_{4n}\mathrm{C}_4}$

ということになり，これを整理していくと

$$n(n-1)(n-2) < 1536$$

ということになります。

これを満たす最大の n を求めればよいわけです。

左辺の 3 次関数の視覚的イメージがあれば，$n \geqq 4$ の範囲で単調増加することが分かります。

したがって，まともに 3 次不等式とぶつかることなく

「解く」よりも「見つける」

という態度で探していけば解決します。

【解答】

$4n$ 枚の異なるカードから 4 枚取る取り方は全部で ${}_{4n}\mathrm{C}_4$ 通り。

＜ P_n について＞

4 枚とも同じ色であるような取り方は

赤 4 枚，青 4 枚，黄 4 枚，白 4 枚

という取り方で，それぞれ ${}_n\mathrm{C}_4$ だから，$4 \cdot {}_n\mathrm{C}_4$ 通り

$$P_n = \frac{4 \cdot {}_n\mathrm{C}_4}{{}_{4n}\mathrm{C}_4}$$

＜ Q_n について＞

4 枚のカードの番号が連続している取り方は，数字が

$$\{1,2,3,4\}, \{2,3,4,5\}, \cdots\cdots, \{n-3, n-2, n-1, n\}$$

の $n-3$ 通りで，各々の組について，どの数字のカードも 4 枚あるので

$$4^4 \cdot (n-3) = 256(n-3) 【通り】$$

$$Q_n = \frac{256(n-3)}{{}_{4n}\mathrm{C}_4}$$

$P_n < Q_n$ となるとき

$$4 \cdot {}_n\mathrm{C}_4 < 256(n-3)$$

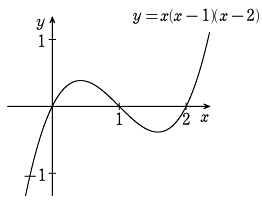
$$4 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} < 256(n-3)$$

$$n(n-1)(n-2) < 1536 \cdots (*)$$

$f(n) = n(n-1)(n-2)$ とすると

$n \geqq 4$ において，$f(n)$ は単調増加。… ①

$$\begin{cases} f(12) = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320 \\ f(13) = 13 \cdot 12 \cdot 11 = 1716 \end{cases} \cdots ②$$



①，② より，(*) を満たす最大の n は $n = 12$ … 答

【総括】

ポーカーでいう「フラッシュ」，「ストレート」です。

トランプもちょうど 4 種類ですから，$P_n < Q_n$ を考えるということは

「ストレートがフラッシュより起こりやすいとき」

を考えることになります。

本来のトランプは 13 枚ですから，このルールではフラッシュの方が起こりやすいことになります。

ただし，実際のポーカーは 5 枚ですし「10，J，Q，K，A」などの循環形もストレートとみなしますから，もう少し複雑になります。

【検証】

実際のトランプでのポーカーについて，ストレートとフラッシュの確率を考察してみます。

ジョーカーについては抜いて，数字は $1 \sim 13$ まで，種類はスペード，クローバー，ダイヤ，ハート の 4 種類の $13 \cdot 4 = 52$ 【枚】で考えます。

＜フラッシュについて＞

スペード 5 枚，クローバー 5 枚，ダイヤ 5 枚，ハート 5 枚

のいずれかとなる確率で，$\dfrac{4 \cdot {}_{13}\mathrm{C}_5}{{}_{52}\mathrm{C}_5}$

＜ストレートについて＞

「10，J，Q，K，A」などの循環形もストレートとみなします。

5 枚のカードの番号が連続している取り方は，数字が

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \cdots\cdots, \{13, 1, 2, 3, 4\}$$

という 13 通りで，各々の組について，どの数字のカードも 4 枚あるので

$$4^5 \cdot 13 \text{ 【通り】}$$

よって，$\dfrac{4^5 \cdot 13}{{}_{52}\mathrm{C}_5}$

分母は共通なので，$4 \cdot {}_{13}\mathrm{C}_5$，$4^5 \cdot 13$ の大小を考えると

$$\begin{aligned}
4^5 \cdot 13 - 4 \cdot {}_{13}\mathrm{C}_5 &= 4^5 \cdot 13 - 4 \cdot \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{5!} \\
&= 4^5 \cdot 13 - 4 \cdot \frac{13 \cdot \cancel{12} \cdot 11 \cdot \cancel{10} \cdot 9}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} \\
&= 4\,(4^4 \cdot 13 - 13 \cdot 99) \\
&= 4 \cdot 13\,(4^4 - 99) > 0
\end{aligned}$$

なので，ストレートの方が起こりやすいことになります。