放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{P}(t\,,\,t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1\,,\,(t+1)^2)$ をとる。

(1) t がすべての実数を動くとき，直線 PQ が通過する領域を図示せよ。

(2) t が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過する領域を図示せよ。

＜ ’09 横浜国立大，’14 名古屋大 ＞

【戦略】

(1) **直線の通過領域を捉える際の有力候補は逆像法です。**

この直線 PQ の式は $y=\dfrac{(t+1)^2-t^2}{(t+1)-t}(x-t)+t^2$ **すなわち**

$$y=(2t+1)x-t^2-t$$

です。

題意の通過領域を D としたとき，例えば $(0\,,\,0)$ は D に入る？と考えると

$0=(2t+1)\cdot 0-t^2-t$，**すなわち** $t^2+t=0$ **を満たす t が実数として存在するかどうかが問題となり，この場合，$t=0\,,\,-1$ と確かに実数として t が存在するため，直線 PQ は $(0\,,\,0)$ を通り得るわけです。**

$(1\,,\,2)$ **は D に入る？，** $\left(-2\,,\,\dfrac{1}{3}\right)$ **は D に入る？ も同じことです。**

しらみつぶすという気持ちで

$(X\,,\,Y)$ は D に入る？　入れるとしたらどんな $(X\,,\,Y)$ ？

と考えます。

すると， $Y=(2t+1)X-t^2-t$，**すなわち**

$$t^2-(2X-1)t+Y-X=0\ \cdots(*)$$

を満たす t が実数として存在するかどうかが問題となり，判別式が 0 以上となればよいことになります。

(2) **「線分」と言うのが厄介です。**

$(*)$ が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲に少なくとも 1 つ解をもつ

だけでは不十分です。

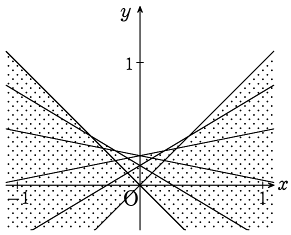
例えば， $\left(2\,,\,\dfrac{8}{9}\right)$ **が題意の通過領域 D' に含まれるかを考えてみます。**

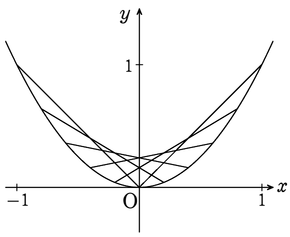
すると， $(*)$ **は** $t^2-3t-\dfrac{10}{9}=0$，**すなわち** $9t^2-27t-10=0$ **となり**

$(3t+1)(3t-10)=0$ **から** $-1\leqq t\leqq 0$ **の範囲に** $t=-\dfrac{1}{3}$ **というものが存在します。**

しかし， $\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{3}\,,\,\dfrac{1}{9}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{2}{3}\,,\,\dfrac{4}{9}\right)$ **に対して，線分 PQ 上に** $\left(2\,,\,\dfrac{8}{9}\right)$ **はありません。**

そこで，今回の通過領域が $y\geqq x^2$ の一部分であることを利用します。





「一旦」直線 PQ の通過領域を考え，それを $y\geqq x^2$ でカットします。

【解答】

(1) 直線 PQ の方程式は $y=\dfrac{(t+1)^2-t^2}{(t+1)-t}(x-t)+t^2$

すなわち $y=(2t+1)x-t^2-t$

題意の通過領域を D とする。

$(X\,,\,Y)$ が D に含まれるとき，$Y=(2t+1)X-t^2-t$，すなわち

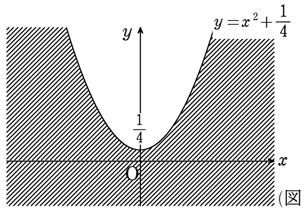
$$t^2-(2X-1)t+Y-X=0\ \cdots(*)$$

を満たす t が実数として存在する。

判別式について，$\{-(2X-1)\}^2-4(Y-X)\geqq 0$

これを整理すると，$Y\leqq X^2+\dfrac{1}{4}$

ゆえに，求める通過領域 D を与える不等式は $y\leqq x^2+\dfrac{1}{4}$ で表されこれを図示すると以下の (図 1) のようになる。(境界線を含む)



(図 1)

(2) 求める通過領域を D' とする。

$(X\,,\,Y)$ が D' に含まれるとき

$-1\leqq t\leqq 0$ で t を動かしたときの直線 PQ の通過領域を考える

$$\begin{cases}(*)\text{ を満たす } t \text{ が } -1\leqq t\leqq 0 \text{ の範囲に少なくとも 1 つ存在する}\\ Y\geqq X^2\end{cases}$$

それを $y=x^2$ でカット

$$\begin{aligned}f(t)&=t^2-(2X-1)t+Y-X\\&=\left(t-\frac{2X-1}{2}\right)^2-X^2+Y-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

とおく。

(i)　$t=-1$ または $t=0$ を解にもつとき

$f(-1)f(0)=0$ で，$(X+Y)(-X+Y)=0$

$$Y=-X \quad \text{または} \quad Y=X$$

(ii)　$-1<t<0$ で重解でない解を 1 つだけもつとき

$f(-1)f(0)<0$ で，$(X+Y)(-X+Y)<0$

$$\begin{cases} X+Y<0 \\ -X+Y>0 \end{cases} \text{または} \begin{cases} X+Y>0 \\ -X+Y<0 \end{cases}$$

すなわち $\begin{cases} Y<-X \\ Y>X \end{cases}$ または $\begin{cases} Y>-X \\ Y<X \end{cases}$

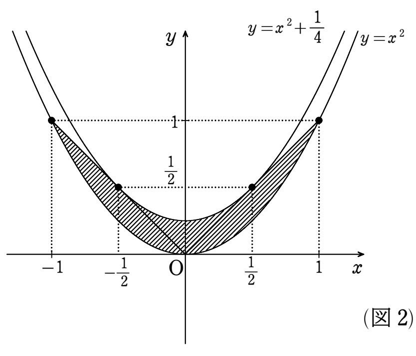
(iii)　$-1<t<0$ で相異なる 2 つの実数解 (重解を含む) をもつとき

$$\begin{cases} \text{軸について} \ -1<\dfrac{2X-1}{2}<0 \\ \text{判別式について} \ Y \leqq X^2+\dfrac{1}{4} \ \text{((1) の結果)} \\ f(-1)(=X+Y)>0 \\ f(0)(=-X+Y)>0 \end{cases}$$

これを整理すると

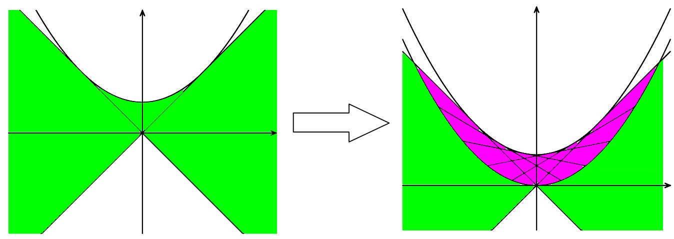
$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}<X<\dfrac{1}{2} \\ Y \leqq X^2+\dfrac{1}{4} \\ Y>-X \\ Y>X \end{cases}$$

これらに加え，$Y \geqq X^2$ であることも考えると，求める通過領域 D' は以下の (図 2) のようになる。(境界線を含む)



(図 2)

【総括】



というように，一旦「直線」の通過領域を考えて，それを「カットする」という方向性で考えるのは，ある程度の経験値の裏付けがないと難しいかもしれません。

【参考】

今回の直線 PQ の式を $g(x)=(2t+1)x-t^2-t$ とおくと

$$g(x)=-\left\{t-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right\}^2+x^2+\frac{1}{4}$$

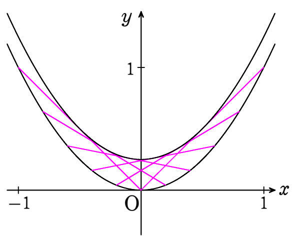
$$\Leftrightarrow$$

$$g(x)-\left(x^2+\frac{1}{4}\right)=-\left(x-t-\frac{1}{2}\right)^2$$

と変形できます。

これが意味するところは，$y=g(x)$ と $y=x^2+\dfrac{1}{4}$ を連立したら重解になるということであり，$y=g(x)$ は $y=x^2+\dfrac{1}{4}$ の $\left(t+\dfrac{1}{2},\ \left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\right)$ における接線になっているということです。

これが看破できれば



というイメージができるでしょうが，これについては包絡線というものに習熟している必要があります。

ここでそれをガッツリやると話がブレるので，包絡線については別に機会を設けて扱えればと思います。