座標空間内に 5 点 A$(2,0,0)$，B$(0,2,0)$，C$(-2,0,0)$
D$(0,-2,0)$，E$(0,0,-2)$ を考える。

線分ABの中点 M と線分 AD の中点 N を通り，直線 AE に平行な平面を α とする。さらに，p は $0<p<2$ をみたす実数とし，点 P $(p,0,2)$ を考える。

(1) 八面体 PABCDE の平面 $y=0$ による切り口および，平面 α の平面 $y=0$ による切り口を同一平面上に図示せよ。

(2) 八面体 PABCDE の平面 α による切り口が八角形となる p の範囲を求めよ。

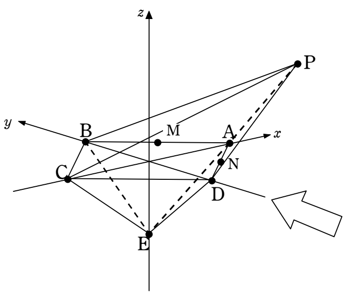
(3) 実数 p が(2)で定まる範囲にあるとする。八面体 PABCDE の平面 α による切り口のうち，$y\geqq 0$，$z\geqq 0$ の部分を点 (x,y,z) が動くとき，座標平面上で点 (y,z) が動く範囲の面積を求めよ。

< '19 東京大 >

【戦略】

空間図形の話で，本問の場合は実際に切り口を図示したり，位置関係を考察する必要がありますから，ある程度の空間認識能力が必要になってきます。

まずは軽く全体像である八面体 PABCDE を図示してみます。



(1) は $y=0$ による平面上でどう見えるか？という問いなので，上の方向から見てみます。

$y=0$，すなわち xz 平面には，この八面体の頂点のうち，P，A，C，E がのっていますから，八面体だけを $y=0$ で切った切り口は四角形 PCEA です。

平面 α は の方向から見ると，直線状に見えます。

α は直線 AE と平行な平面であることを考えると，P の場所によって，3 パターンの位置関係が見えてくるでしょう。

平面 α（$z=x-1$）上に点 P が乗るときである $p=3$ のときが場合分けの境目となります。

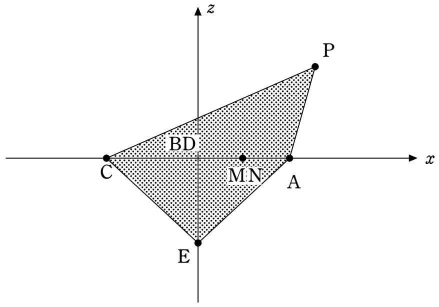
(2) は八面体の 12 本の辺のうち，α とぶつかっている辺の数が分かれば，その交点が切り口を構成する頂点となります。切り口が八角形となっていてほしいので，平面 α と交点をもつ辺が 8 本であればよいことになりますが，その際に (1) の結果が辺とぶつかっているかどうかを判定するのに役にたちます。

(3) は $y\geqq 0$，$z\geqq 0$ の範囲なので，切り口の八角形を構成する頂点のうち，PB上，PC上 にある頂点を調べることになります。

切り口となる (x,y,z) のうち，” x 座標を無視して座標平面上に (y,z) を図示する ” ということは，切り口の yz 平面への正射影を考えることになります。

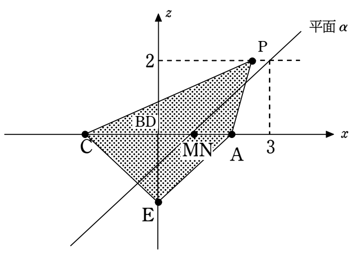
【解答】

(1) 平面 $y=0$ による八面体 PABCDE の切り口を図示すると

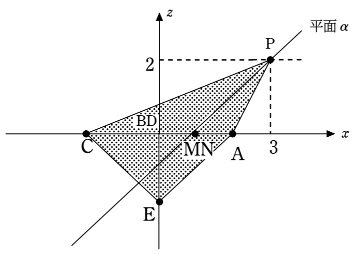


さらに，平面 α の $y=0$ による切り口も合わせて図示することを考えると，点 P の x 座標である p の大小関係により，以下のように図示できる。

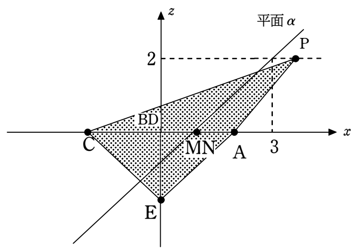
（ $2<p<3$ のとき ）



（$p=3$ のとき）



（$3<p<4$ のとき）



(2) (i) $2<p<3$ のとき

(1) の図より平面 α は八面体の辺のうち，辺 PA，AB，AD，CE，DE，BE と共有点をもつことになり，切り口は 6 角形となる。

(ii) $p=3$ のとき

(1) の図より平面 α は八面体の辺のうち，辺 PA，AB，AD，CE，DE，BE と共有点をもつことになり，切り口は 6 角形となる。

(iii) $3<p<4$ のとき

(1) の図より平面 α は八面体の辺のうち，辺 PB，PC，PD，AB，AD，CE，DE，BE と共有点をもつことになり，切り口は 8 角形となる。

以上から，八面体 PABCDE と平面 α の切り口が八角形となる p の範囲は $3<p<4$ …答

(3)　(2) の (iii) ときの考察において

平面 α と，辺 PB，PC との交点をそれぞれ Q，R とする。

点 Q は線分 PB 上の点なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}p\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}pt\\2-2t\\2t\end{pmatrix}$$

Q は平面 $\alpha : z=x-1$ 上の点なので，$2t=pt-1$，
すなわち $t=\dfrac{1}{p-2}$

これより，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{p}{p-2},\ \dfrac{2p-6}{p-2},\ \dfrac{2}{p-2}\right)$

点 R は線分 PR 上の点なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-s)\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}p\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+2s+ps\\0\\2s\end{pmatrix}$$

R は平面 $\alpha : z=x-1$ 上の点なので，$2s=-2+2s+ps-1$，
すなわち $s=\dfrac{3}{p}$

これより，$\mathrm{R}\left(1+\dfrac{6}{p},\ 0,\ \dfrac{6}{p}\right)$

点 Q，R を yz 平面に正射影した点をそれぞれ Q′，R′ とすると

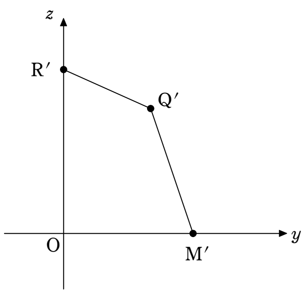
$\mathrm{Q}'\left(\dfrac{2p-6}{p-2},\ \dfrac{2}{p-2}\right)$，$\mathrm{R}'\left(0,\ \dfrac{6}{p}\right)$ である。

また，点 M(1，1，0) を yz 平面に正射影した点を M′ とすると，
M′ (1，0)

求める面積は yz 平面における 次図の四角形 OM′Q′R′の面積である。

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\triangle \mathrm{OQ'R'}+\triangle \mathrm{OQ'M'}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{p}\cdot\frac{2p-6}{p-2}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2}{p-2}\\&=\frac{6(p-3)}{p(p-2)}+\frac{1}{p-2}\\&=\frac{7p-18}{p(p-2)}\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$



【総括】

東大は昔から図形認識力を見る問題が好きな大学です。特に八面体に関する話題は，1990 年度，2008 年度にも出題されており，いずれも機械的な対応では太刀打ちできないレベルです。

本問も空間図形の認知能力を真正面から問いかけています。

いきなりは難しいので，まずは「見やすい方向はどの方向だろうか？」あるいは本問のヒントである (1) のように，「平面図形を取り出して考える」など，認識しやすくなるように見る工夫を積み重ねていくことが図形的センスを磨くことに繋がります。

落ち着いて考えれば標準的な難易度ですが，試験場補正がかなり強くはたらく問題ではあります。

【補足】

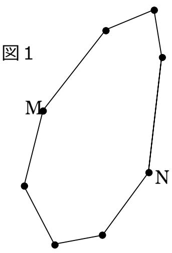
(3) のかなりざっくりとしたイメージ図を考えてみます。

題意の切り口の八角形がざっくりと右の図１のようだったとしましょう。

M，N がこの八角形の頂点になることは大丈夫だと思います。

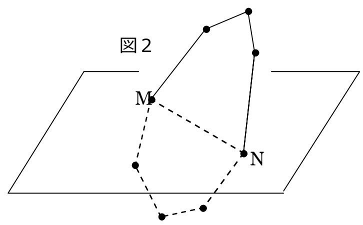
そして，M，N が $z=0$ 上であることに注目します。

図１



今，$z\geqq 0$ の部分を考えるので，下半分は切ってしまいます。(図２参照)

図２



次に $y\geqq 0$ の部分を考えるにあたり，y 軸，z 軸を書き込みます (図３)
そうなると，題意の八角形のうち，$y\geqq 0$，$z\geqq 0$ の部分というのは図３の斜線部となります。

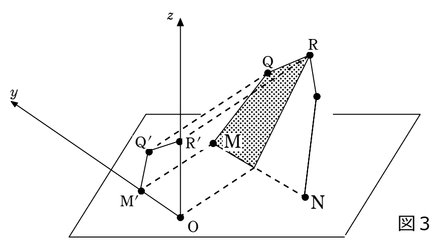


図３

そうなってくると，$y\geqq 0$，$z\geqq 0$ の範囲にある頂点は，平面 α と辺 PB，PC の交点ですから，【解答】のような出だしとなります。

もちろん最後の求める面積は図３の四角形 OM′Q′R′ の面積です。