座標平面上に，媒介変数 θ で表された曲線

$$\begin{cases} x=\theta-\sin\theta \\ y=1-\cos\theta \end{cases} \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

がある。

この曲線上の相異なる 2 点 P，Q での接線が互いに直交するとき，線分 PQ の中点の軌跡を求めよ。

＜ ’88 岐阜大 ＞

【戦略】

$y=f(x)$ **の形にして** $\dfrac{dy}{dx}$ **を得ることができないため，**

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$ **として，導関数に相当するものを得ます。**

今回， $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ **を得ますが，ここからもう少し踏み込んで**

2 倍角公式 $\sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$ **，半角公式** $\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$

でほぐしていくと， $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$ **までシンプルに整理できます。**

これが意味するのは，

$(\theta-\sin\theta\ ,\ 1-\cos\theta)$ **における接線の傾きが** $\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

ということです。

そこで， $\mathrm{P}(\theta_1-\sin\theta_1\ ,\ 1-\cos\theta_1)$，$\mathrm{Q}(\theta_2-\sin\theta_2\ ,\ 1-\cos\theta_2)$ **として考えていきます。**

P，Q の対等性から $0 \leqq \theta_1 < \theta_2 \leqq 2\pi$ **としても一般性を失いません。**

2 接線に傾きが存在する $0<\theta_1<\theta_2<2\pi$ **のときを大枠で考え，接線の傾きが存在しない** $\theta_1=0$ **，および** $\theta_2=2\pi$ **のときは別枠で考えます。**

直交条件を手なりに翻訳していくと， $\theta_2=\theta_1+\pi$ **と 1 文字消去することができます。**

あとは，軌跡の導出の基本 $(X\ ,\ Y)$ **とおき，** X，Y **の満たすべき関係式を求めにいきます。**

文字消去する際に，「遺産の整理」という言葉に注意しましょう。

θ_2 **は消えますが，** $0<\theta_1<\theta_2<2\pi$ **という生前満たしていた条件を**

$0<\theta_1<\theta_1+\pi<2\pi$**，すなわち** $0<\theta_1<\pi$ **と引き継がせます。**

【解答】

与えられた曲線を C とすると，曲線 C に対して，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

$$=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$0 \leqq \theta_1 \leqq 2\pi$，$0 \leqq \theta_2 \leqq 2\pi$ として，この曲線 C 上の 2 点 P，Q は

$\mathrm{P}(\theta_1-\sin\theta_1\ ,\ 1-\cos\theta_1)$，$\mathrm{Q}(\theta_2-\sin\theta_2\ ,\ 1-\cos\theta_2)$

と表せる。

$0 \leqq \theta_1 < \theta_2 \leqq 2\pi$ として考えても一般性を失わない。

(i)　$0<\theta_1<\theta_2<2\pi$ のとき

点 P における C の接線 ℓ_1 の傾きは $\dfrac{\cos\frac{\theta_1}{2}}{\sin\frac{\theta_1}{2}}$

点 Q における C の接線 ℓ_2 の傾きは $\dfrac{\cos\frac{\theta_2}{2}}{\sin\frac{\theta_2}{2}}$

ℓ_1，ℓ_2 が直交するので，$\dfrac{\cos\frac{\theta_1}{2}}{\sin\frac{\theta_1}{2}}\cdot\dfrac{\cos\frac{\theta_2}{2}}{\sin\frac{\theta_2}{2}}=-1$

これより，$\cos\dfrac{\theta_2}{2}\cos\dfrac{\theta_1}{2}+\sin\dfrac{\theta_2}{2}\sin\dfrac{\theta_1}{2}=0$

これは $\cos\left(\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)=0$ と変形できる。

$0<\theta_1<\theta_2<2\pi$ の範囲では，θ_1，θ_2 の幅 $\theta_2-\theta_1$ の範囲は

$0<\theta_2-\theta_1<2\pi$ ，すなわち $0<\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}<\pi$ であるので

$\cos\left(\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)=0$ を満たすとき，$\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}=\dfrac{\pi}{2}$

これより，$\theta_2=\theta_1+\pi$ …① を得る。

さて，線分 PQ の中点を (X, Y) とすると

$$
\begin{aligned}
X&=\frac{(\theta_1-\sin\theta_1)+(\theta_2-\sin\theta_2)}{2}\\
&=\frac{\theta_1+\theta_2-(\sin\theta_1+\sin\theta_2)}{2}\\
&=\frac{\theta_1+(\theta_1+\pi)-\{\sin\theta_1+\sin(\theta_1+\pi)\}}{2} \quad (\because (*))\\
&=\frac{2\theta_1+\pi-(\sin\theta_1-\sin\theta_1)}{2}\\
&=\theta_1+\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y&=\frac{(1-\cos\theta_1)+(1-\cos\theta_2)}{2}\\
&=\frac{2-(\cos\theta_1+\cos\theta_2)}{2}\\
&=\frac{2-\{\cos\theta_1+\cos(\theta_1+\pi)\}}{2} \quad (\because (*))\\
&=\frac{2-(\cos\theta_1-\cos\theta_1)}{2}\\
&=1
\end{aligned}
$$

また，$0<\theta_1<\theta_2<2\pi$ 及び $(*)$ より，$0<\theta_1<\theta_1+\pi<2\pi$

これより，$0<\theta_1<\pi$ であるので，辺々 $\dfrac{\pi}{2}$ を加えると

$\dfrac{\pi}{2}<X<\dfrac{3}{2}\pi$ を得るため，線分 PQ の中点の軌跡は

$$
\begin{cases}
\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3}{2}\pi\\
y=1
\end{cases}
$$

(ii) $\theta_1=0$ のとき $\mathrm{P}(0, 0)$

P における接線は y 軸であり，それに直交する接線の傾きは 0

ゆえに，$\mathrm{Q}(\theta_2-\sin\theta_2, 1-\cos\theta_2)$ における接線の傾きについて

$\dfrac{\cos\dfrac{\theta_2}{2}}{\sin\dfrac{\theta_2}{2}}=0$，すなわち $\theta_2=\pi$ を得る。

これより，$\mathrm{Q}(\pi, 2)$ であり，線分 PQ の中点は $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$

(iii) $\theta_2=2\pi$ のとき $\mathrm{Q}(2\pi, 0)$

Q における接線は $x=2\pi$ であり，それに直交する接線の傾きは 0

ゆえに，$\mathrm{P}(\theta_1-\sin\theta_1, 1-\cos\theta_1)$ における接線の傾きについて

$\dfrac{\cos\dfrac{\theta_1}{2}}{\sin\dfrac{\theta_1}{2}}=0$，すなわち $\theta_1=\pi$ を得る。

これより，$\mathrm{P}(\pi, 2)$ であり，線分 PQ の中点は $\left(\dfrac{3}{2}\pi, 1\right)$

以上 (i), (ii), (iii) から求める線分 PQ の中点の軌跡は

線分 $y=1$ $\left(\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}\pi\right)$ …答

【総括】

パラメータ表示された曲線についての接線の扱いに関して，基本的な運用力を試す問題でした。

$\dfrac{dy}{dx}=\cdots=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ と，ここでとまると，

直交条件 $\dfrac{\sin\theta_1}{1-\cos\theta_1}\cdot\dfrac{\sin\theta_2}{1-\cos\theta_2}=-1$

分母を払う $\sin\theta_1\sin\theta_2=-(1-\cos\theta_1)(1-\cos\theta_2)$

移項して整理 $\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2=\cos\theta_1+\cos\theta_2-1$

加法定理＆和積公式 $1+\cos(\theta_2-\theta_1)=2\cos\dfrac{\theta_2+\theta_1}{2}\cos\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}$

半角公式 $2\cos^2\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}=2\cos\dfrac{\theta_2+\theta_1}{2}\cos\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}$

因数分解 $\cos\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}\left(\cos\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}-\cos\dfrac{\theta_2+\theta_1}{2}\right)=0$

和積公式 $-2\cos\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}\sin\dfrac{\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}+\dfrac{\theta_2+\theta_1}{2}}{2}\sin\dfrac{\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}-\dfrac{\theta_2+\theta_1}{2}}{2}=0$

整理 $-\cos\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}\sin\dfrac{\theta_2}{2}\sin\dfrac{\theta_1}{2}=0$

$0<\theta_1<\theta_2<2\pi$ では $0<\dfrac{\theta_1}{2}<\dfrac{\theta_2}{2}<\pi$ で，$\sin\dfrac{\theta_1}{2}\fallingdotseq 0$，$\sin\dfrac{\theta_2}{2}\fallingdotseq 0$

であるため，$\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ となり $\theta_2=\theta_1+\pi$ を得て，本解の流れに合流しますが，見ての通り茨の道です。

【参考】

今回扱った

$$\begin{cases} x=\theta-\sin\theta \\ y=1-\cos\theta \end{cases} \quad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

で与えられる曲線は「サイクロイド」と呼ばれます。

水平線上を，円が滑らずに転がっていくとき，円上の定点の軌跡のことですが，一言で言ってしまえば

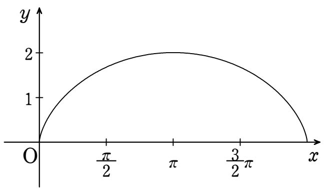
「ガムを踏んだタイヤに対する，ガムの軌跡」

です。

$\dfrac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta\geqq 0$ ， $\dfrac{dy}{d\theta}=\sin\theta$ 　なので

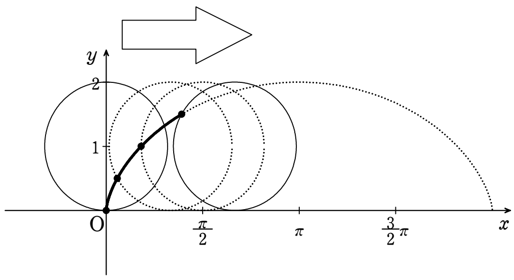
θ	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$\dfrac{dx}{d\theta}$	0	$+$	$+$	$+$	0
x	$\cdot$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\cdot$
$\dfrac{dy}{d\theta}$	0	$+$	0	$-$	0
y	$\cdot$	$\uparrow$	$\cdot$	$\downarrow$	$\cdot$
$\left(\dfrac{dx}{d\theta}, \dfrac{dy}{d\theta}\right)$	$\cdot$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\cdot$
(x, y)	$(0, 0)$		$(\pi, 2)$		$(2\pi, 0)$

という増減表を得るため



のような概形となります。

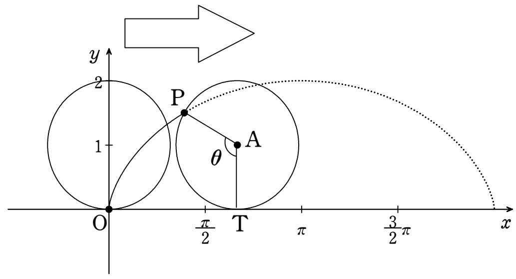
円が転がっていく様子を描くと



といった感じでしょうか。

サイクロイドのパラメータ表示を得るための手順をまとめます。

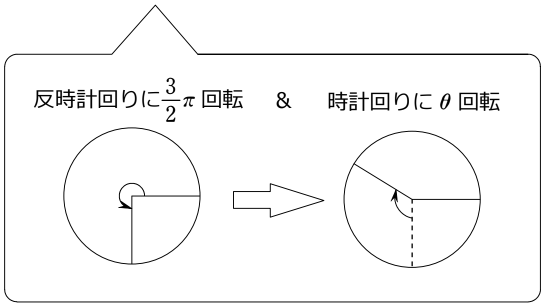
以下では半径１の円が転がっていくときを考えます。



図のように記号を設定します。(θ の単位はラジアン)

転がった分の距離に注目すれば $\mathrm{OT}=\overset{\frown}{\mathrm{PT}}=\theta$ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}\theta\\1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)\\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\-\cos\theta\end{pmatrix}$$



よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\ &=\begin{pmatrix}\theta\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\sin\theta\\-\cos\theta\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\theta-\sin\theta\\1-\cos\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり，サイクロイド上の点 P のパラメータ表示として

$$\begin{cases} x=\theta-\sin\theta \\ y=1-\cos\theta \end{cases}$$

を得ます。

今は半径１の円で転がしましたが，一般に半径 a (>0) の円を転がして考えれば

$$\begin{cases} x=a\,(\theta-\sin\theta\,) \\ y=a\,(1-\cos\theta\,) \end{cases}$$

ということになります。