　実数全体で定義され，実数値をとる関数 $f(x)$，$g(x)$ がある。
任意の実数 a，b に対し，
$f(a+b)=f(a)g(b)+f(b)g(a)$ ，$f(a-b)=f(a)g(b)-f(b)g(a)$
を常に満たすものとし，$f(x)$ は恒等的に 0 でないとする。次の問いに答えよ。

(1) $f(0)$ および $g(0)$ を求めよ。
(2) 任意の実数 x，h に対して $f(x+2h)-f(x)=2f(h)g(x+h)$ が成り立つことを示せ。
(3) $f(x)$ が $x=0$ で微分可能であるとき，$f'(x)$ を $f'(0)$ と $g(x)$ で表せ。

＜ '00 名古屋市立大 ＞

【戦略】

$$f(a+b)=f(a)g(b)+f(b)g(a) \cdots ①$$
$$f(a-b)=f(a)g(b)-f(b)g(a) \cdots ②$$

とします。

全体の流れを見てみると，(1) は $a=b=0$ を代入すれば $f(0)$ の方は解決しそうです。
（関数方程式では特定の値を代入することで所望の値を得るのが常套手段です）

g の方は，①，② から $g=$(f だけの式) とする方針が考えられるでしょうか。

①−② とすると，

$$g(a)=\frac{f(a+b)-f(a-b)}{2f(b)} \text{ から，} g(0)=\frac{f(b)-f(-b)}{2f(b)}$$

となり，手詰まりです。

①＋② とすれば，$g(b)=\dfrac{f(a+b)+f(a-b)}{2f(a)}$ を得て，$g(0)$ が得られます。

(2) は ①−② で片づきそうです。

(3) は (2) の利用が目につきます。

形から微分の定義を用いて処理するオチを想定したいところです。

【解答】

(1) $f(a+b)=f(a)g(b)+f(b)g(a) \cdots ①$
$f(a-b)=f(a)g(b)-f(b)g(a) \cdots ②$

② に $a=b=0$ を代入し，$f(0-0)=f(0)g(0)-f(0)g(0)$

これより，$f(0)=0 \cdots$ 答

また，①＋② より

$$f(a+b)+f(a-b)=2f(a)g(b)$$

$f(a)$ は恒等的に 0 ではないので，$g(b)=\dfrac{f(a+b)+f(a-b)}{2f(a)}$

これより，

$$\begin{aligned} g(0)&=\frac{f(a+0)+f(a-0)}{2f(a)} \\ &=\frac{2f(a)}{2f(a)} \\ &=1 \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(2) ①−② より，$f(a+b)-f(a-b)=2f(b)g(a)$

$a=x+h$，$b=h$ とすると，$f(x+2h)-f(x)=2f(h)g(x+h)$

となり，題意は示された。

(3)

微分係数の定義です。

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h} \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{2f(h)g(x+h)}{2h} \quad (\because (2)) \\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)g(x+h)}{h} \\ &=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(h)-f(0)}{h-0}\cdot g(x+h)\right\} \quad (\because (1) \text{ より } f(0)=0) \\ &=f'(0)g(x) \cdots \text{答} \end{aligned}$$

【戦略 2】(2) について

要するに与えられた条件は，f の和，差 に関する展開条件ですから，

$$x+2h=(x+h)+h$$
$$x=(x+h)-h$$

と見て計算していってもよいでしょう。

【解 2】(2) について

$$\begin{aligned} f(x+2h)-f(x)&=f(\,(x+h)+h\,)-f(x) \\ &=f(x+h)g(h)+f(h)g(x+h)-f(x) \\ &=f(x+h)g(h)+f(h)g(x+h)-f(\,(x+h)-h) \\ &=f(x+h)g(h)+f(h)g(x+h)-\{f(x+h)g(h)-f(h)g(x+h)\} \\ &=2f(h)g(x+h) \end{aligned}$$

となり，示された。

【総括】

$f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$ というモデルケースが目につきますが，それを全面に押し出すことはできませんし，決めつけることもできません。

あくまで， $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$ というのは，①，② を満たす関数の一例であるにすぎません。（他にないかと言われたら困るわけです）

例えば，$f(\alpha\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$ を満たす $f(x)$ としては

$$f(x)=\log x \ (x>0)$$

がありますが，この他にも，複素数 z に対して，$f(z)=\arg z$ という関数を定めると

$$f(\alpha\beta)=\arg \alpha\beta=\arg \alpha+\arg \beta=f(\alpha)+f(\beta)$$

となり，$f(\alpha\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$ が成り立ちます。

与えられた条件，及びそこから言えること以上のことを決めつけないように注意して下さい。

抽象的な関数に対しての扱いについてよい訓練となる問題だと思います。