a，b，c を整数として，x，y，z を次のように定める。

$$x=a+b+c$$
$$y=ab+bc+ca$$
$$z=abc$$

(1) $a<0$，$b<0$，$x>0$ ならば，$y<0$ であることを示せ。
(2) x，y，z がすべて正であるための必要十分条件は，a，b，c がすべて正であることを示せ。
(3) x，y，z がすべて正でありかつすべて 3 の倍数であるための必要十分条件は，a，b，c がすべて正でありかつすべて 3 の倍数であることを示せ。

＜ '07 愛媛大 ＞

【戦略】

(1) **$x>0$ であることから，$c>-(a+b)$ $\cdots$ ① を得ます。**

目標は，$y=ab+bc+ca<0$ であり，y を大きくしようという気持ちで評価していきます。

① を用いて「c を消す」という感覚で

$$y=ab+c(a+b)<ab-(a+b)(a+b)$$

と見ることができれば，話がとんとん拍子で進みます。

(2) **$a>0$，$b>0$，$c>0 \Longrightarrow x>0$，$y>0$，$z>0$ であることは明らかなので，**

$x>0$，$y>0$，$z>0 \Longrightarrow a>0$，$b>0$，$c>0$ を示します。

特に，$z>0$ なので，$\begin{cases} a,\ b,\ c \text{ の全てが正} \\ a,\ b,\ c \text{ の } 1 \text{ つが正で，} 2 \text{ つが負} \end{cases}$

ということになりますが，例えば，$a<0$，$b<0$ とすると，仮定の $x>0$ と併せて (1) の結果から $y<0$ となりますが，$x>0$，$y>0$，$z>0$ のときという結果に矛盾します。

もちろん，$a<0$，$c<0$ のときも，$b<0$，$c<0$ のときも (1) に準ずる結果は得られます。

これにより，「a，b，c の 1 つが正で，2 つが負」という結果が否定され，a，b，c の全てが正であることが言えることになります。

(3) **(2) の $>$ が，合同式 $\equiv$ になったと思えば，同じ要領で話を進めればよいことが分かります。**

【解答】

(1) 条件 $x>0$ より，$a+b+c>0$ であり，$c>-(a+b)\cdots$ ①

条件 $a<0$，$b<0$ なので，$a+b<0$ であり，① の両辺に $a+b$ をかけると

$$c(a+b)<-(a+b)^2 \cdots ②$$

$$\begin{aligned} y&=ab+bc+ca \\ &=ab+c(a+b) \\ &<ab-(a+b)^2 \quad (\because ②) \\ &=-(a^2+ab+b^2) \\ &<0 \end{aligned}$$

となり，示された。

(2) $a>0$，$b>0$，$c>0 \Longrightarrow x>0$，$y>0$，$z>0$ であることは明らかなので

$x>0$，$y>0$，$z>0 \Longrightarrow a>0$，$b>0$，$c>0$ であることを示す。

$\begin{cases} x>0 \cdots ③ \\ y>0 \cdots ④ \\ z>0 \cdots ⑤ \end{cases}$ のとき，⑤ より，$abc>0$

これより $\begin{cases} a>0,\ b>0,\ c>0 \cdots (ア) \\ a<0,\ b<0,\ c>0 \cdots (イ) \\ a<0,\ b>0,\ c<0 \cdots (ウ) \\ a>0,\ b<0,\ c<0 \cdots (エ) \end{cases}$ のいずれかである。

(イ) が成立すると仮定すると，③ も併せると，(1) より $y<0$ が成立する。

しかし，それは ④ に矛盾する。

$\begin{cases} a<0,\ c<0,\ x>0 \Longrightarrow y<0 \\ b<0,\ c<0,\ x>0 \Longrightarrow y<0 \end{cases}$ という (1) に準ずる結果も成立する。

したがって，(ウ) が成立すると仮定しても，(エ) が成立すると仮定しても矛盾する。

以上から，(ア) が成立するしかなく，

$$x>0,\ y>0,\ z>0 \Longrightarrow a>0,\ b>0,\ c>0$$

である。

これより，$x>0$，$y>0$，$z>0 \Longleftrightarrow a>0$，$b>0$，$c>0$ である。

(3)　以下，合同式の法を 3 とする。

$a\equiv 0$，$b\equiv 0$，$c\equiv 0 \implies x\equiv 0$，$y\equiv 0$，$z\equiv 0$ であることは明らかなので

$x\equiv 0$，$y\equiv 0$，$z\equiv 0 \implies a\equiv 0$，$b\equiv 0$，$c\equiv 0$ であることを示す。

$\begin{cases} x\equiv 0 \cdots ⑥ \\ y\equiv 0 \cdots ⑦ \\ z\equiv 0 \cdots ⑧ \end{cases}$　のとき，⑧ より，$abc\equiv 0$

これより　$\begin{cases} a\equiv 0,\ b\equiv 0,\ c\equiv 0 \cdots (\text{オ}) \\ a\equiv 0,\ b\equiv \pm 1,\ c\equiv \pm 1 \cdots (\text{カ}) \\ a\equiv \pm 1,\ b\equiv 0,\ c\equiv \pm 1 \cdots (\text{キ}) \\ a\equiv \pm 1,\ b\equiv \pm 1,\ c\equiv 0 \cdots (\text{ク}) \\ a\equiv 0,\ b\equiv 0,\ c\equiv \pm 1 \cdots (\text{ケ}) \\ a\equiv 0,\ b\equiv \pm 1,\ c\equiv 0 \cdots (\text{コ}) \\ a\equiv \pm 1,\ b\equiv 0,\ c\equiv 0 \cdots (\text{サ}) \end{cases}$

(カ) が成立すると仮定すると，$ab+bc+ca\equiv bc\equiv \pm 1$ となり
⑦ に矛盾する。

同様に，(キ) が成立すると仮定しても，(ク) が成立すると仮定しても，⑦ に矛盾する。

(ケ) が成立すると仮定すると，$a+b+c\equiv c\equiv \pm 1$ となり
⑥ に矛盾する。

同様に，(コ) が成立すると仮定しても，(サ) が成立すると仮定しても，⑥ に矛盾する。

以上から，(オ) が成立するしかなく

$$x\equiv 0,\ y\equiv 0,\ z\equiv 0 \implies a\equiv 0,\ b\equiv 0,\ c\equiv 0$$

が成立する。

これより $x\equiv 0$，$y\equiv 0$，$z\equiv 0 \iff a\equiv 0$，$b\equiv 0$，$c\equiv 0$ である。

【総括】

$x=a+b$，$y=ab$　に対して，

$$x>0 \text{ かつ } y>0 \iff a>0 \text{ かつ } b>0$$

という 2 文字の対称式の性質の拡張です。

$a>0$ かつ $b>0 \implies x>0$ かつ $y>0$ は自明なので，実質は
$x>0$ かつ $y>0 \implies a>0$ かつ $b>0$ であることがメインです。

$y>0$ なので，$\begin{cases} a>0 \text{ かつ } b>0 \\ a<0 \text{ かつ } b<0 \end{cases}$ のいずれかですが，$a<0$ かつ $b<0$ だと $x>0$ であることに矛盾するので，$a>0$ かつ $b>0$ ということになります。

本問の場合，3 文字ということもあり，場合分けの数が多く，2 文字の場合ほど単純ではなかったと思います。

特に (1) の事実が結構強力なヒントであり，それがなかったらと思うと結構厳しいと思われます。