多項式の列

$P_0(x)=0$，$P_1(x)=1$，$P_2(x)=1+x$．$P_3(x)=1+x+x^2$，$\cdots$，$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1} x^k$

を考える。

(1)　正の整数 n，m に対して，$P_n(x)$ を $P_m(x)$ で割った余りは

$$P_0(x),\ P_1(x),\ \cdots,\ P_{m-1}(x)$$

のいずれかであることを証明せよ。

(2)　等式 $P_\ell(x)P_m(x^2)P_n(x^4)=P_{100}(x)$ が成立するような正の整数の組 (ℓ,m,n) を全て求めよ。

＜ '92 東京大 ＞

【戦略】

(1) が主張していることは "添え字" だけで見れば当たり前です。
n を m で割った余りは 0，1，2，$\cdots$，$m-1$ なのですから

このことを皮切りに，n を m で割った余りを r としたとき，

$P_n(x)$ を $P_m(x)$ で割った余りが $P_r(x)$ なのでは？

という洞察ができればしめたものです。

「$P_m(x)$ で括ろう」という気持ちで式変形していけば自ずと余りに $P_r(x)$ が現れます。

(2) は (1) において $r=0$ のときを考えます。

これにより，P について，積に分解する式を Get できます。

その式を使って，「$P_{100}(x)$ をうまく分解できないか」を考えていけば

$$P_{100}(x)=\begin{cases} P_2(x)P_{50}(x^2)P_1(x^4) \\ P_2(x)P_2(x^2)P_{25}(x^4) \\ P_4(x)P_1(x^2)P_{25}(x^4) \\ P_{100}(x)P_1(x^2)P_1(x^4) \end{cases}$$ **と 4 通りに変形できます。**

ただし，これはあくまで「上手い変形を見つけただけ」です。

他にもうまく変形できないか，と言われたら困るので，「これ以上ない」と言い切る必要があります。

【解答】

(1)　n を m で割った商を q，余りを r（$r=0$，1，2，$\cdots$，$m-1$）とする。

このとき，$n=mq+r$

$$\begin{aligned} P_n(x)=&x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x^{m-m} \\ &+x^{n-m-1}+x^{n-m-2}+\cdots\cdots+x^{n-2m} \\ &+x^{n-2m-1}+x^{n-2m-2}+\cdots\cdots+x^{n-3m} \\ &\quad\vdots \\ &+x^{n-(q-1)m-1}+x^{n-(q-1)m-2}+\cdots\cdots+x^{n-qm} \\ &+x^{r-1}+x^{r-2}+\cdots\cdots+x+1 \end{aligned}$$

$n-qm=r$ より，
$n-qm$ と $r-1$ は
連続２整数

よって，
$$\begin{aligned} P_n(x)=&x^{n-m}(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1) \\ &+x^{n-2m}(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1) \\ &+x^{n-3m}(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1) \\ &\quad\vdots \\ &+x^{n-qm}(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1) \\ &+x^{r-1}+x^{r-2}+\cdots\cdots+x+1 \\ =&P_m(x)(x^{n-m}+x^{n-2m}+\cdots+x^{n-qm})+P_r(x) \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

よって，$P_n(x)$ を $P_m(x)$ で割った余りは $P_r(x)$（$0\leqq r\leqq m-1$）であり，題意は示された。

(2)　$(*)$ で $r=0$ とすれば

$$\begin{aligned} P_{mq}(x)&=P_m(x)(x^{mq-m}+x^{mq-2m}+\cdots\cdots+x^{mq-qm}) \\ &=P_m(x)(x^{m(q-1)}+x^{m(q-2)}+\cdots\cdots+1) \\ &=P_m(x)P_q(x^m) \quad \cdots(☆) \end{aligned}$$

(☆) において，$m=2$，$q=50$ とすると $P_{100}(x)=P_2(x)P_{50}(x^2)$

$$P_{100}(x)=P_2(x)P_{50}(x^2)=\begin{cases} P_2(x)P_{50}(x^2)P_1(x^4) & (\because P_1(x)=1) \\ P_2(x)P_2(x^2)P_{25}(x^4) & (\because (☆)\text{で}\ m=2,\ q=25\ \text{とした}) \end{cases}$$

一方，(☆) において，$m=4$，$q=25$ とすると

$$P_{100}(x)=P_4(x)P_{25}(x^4)$$

$$P_{100}(x)=P_4(x)P_{25}(x^4)=\begin{cases} P_2(x)P_2(x^2)P_{25}(x^4) & (\because (☆)\text{で}\ m=2,\ q=2\ \text{とした}) \\ P_4(x)P_1(x^4)P_{25}(x^4) & (\because (☆)\text{で}\ m=1,\ q=4\ \text{とした}) \end{cases}$$
$$=P_4(x)P_1(x^2)P_{25}(x^4) \quad (\because P_1(x^4)=P_1(x^2)=1)$$

さらに，$P_{100}(x)=P_{100}(x)P_1(x^2)P_1(x^4)$（$\because P_1(x^4)=P_1(x^2)=1$）

以上から $(\ell,m,n)=(2,50,1)$，$(2,2,25)$，$(4,1,25)$，$(100,1,1)$

これ以上ないことを示す。

$P_\ell(x)P_m(x^2)P_n(x^4)=P_{100}(x)$ $\cdots$① のとき

(左辺)$=(x^{\ell-1}+x^{\ell-2}+\cdots+1)\{(x^2)^{m-1}+(x^2)^{m-2}+\cdots+1\}\{(x^4)^{n-1}+(x^4)^{n-2}+\cdots+1\}$

(右辺)$=x^{99}+x^{98}+\cdots+1$

(左辺の次数)=(右辺の次数)　より，$(\ell-1)+2(m-1)+4(n-1)=99$

すなわち，$\ell+2m+4n=106$ $\cdots$②

一方，① の両辺に $x=1$ を代入すれば，$\ell mn=100$ …③

② より，ℓ は偶数なので，$\ell=2i$（$i=0,1,2,\cdots$）とおくと，②, ③ は

$$\begin{cases} i+m+2n=53 \cdots ④ \\ imn=50 \cdots ⑤ \end{cases}$$

⑤ に注目すれば

i	50	1	1	2	2	1	1	25	25	2	5	5	10	10	5	5	1	1
m	1	50	1	25	1	2	25	1	2	5	2	5	5	1	10	1	5	10
n	1	1	50	1	25	25	2	2	1	5	5	2	1	5	1	10	10	5

このうち，④ を満たすのは
$(i,m,n)=(50,1,1),(1,50,1),(1,2,25),(2,1,25)$ のみ

よって，$(\ell,m,n)=(100,1,1),(2,50,1),(2,2,25),(4,1,25)$

以上から求める ℓ,m,n の値の組は
$(\ell,m,n)=(100,1,1),(2,50,1),(2,2,25),(4,1,25)$ …答

注意

この後半の議論だけでも不十分です。
これは「最高次」，「$x=1$」という観点のみから議論して得た (ℓ,m,n) です。（言ってみたら必要条件）

ですから，前半の議論（これらの ℓ,m,n が恒等式として成立することの確認）も必要になります

【戦略 2】(2) について

$P_k(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}$ **を等比数列の和と捉えて**

$P_k(x)=\dfrac{1-x^k}{1-x}$ **と見る人もいるのではないかと思います。**

※　もちろん分母を払った $(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1})=1-x^k$ という因数分解をインスピレーションしても同じ事ですが。

つまり，$P_k(x)$ 単独だと「…」を用いて表さざるをえませんが，

$(1-x)P_k(x)$ **だと，$(1-x)P_k(x)=1-x^k$ とすっきりした形になります。**

そこで，今回扱う左辺の $P_\ell(x)P_m(x^2)P_n(x^4)$ を直接相手にするのではなく $(1-x)P_\ell(x)$ $(1-x^2)P_m(x^2)$ $(1-x^4)P_n(x^4)$，すなわち

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^4)P_\ell(x)P_m(x^2)P_n(x^4)$$

を計算しようということになるわけです。

これにより，$(1-x^\ell)(1-x^{2m})(1-x^{4n})=(1-x^2)(1-x^4)(1-x^{100})$ が x の恒等式だという条件に帰着されます。

一見すると，指数部分を見比べて対応させればよさそうですが，当然自明ではありません。
しかし，とりあえずこれを認めてしまえば，$4n$ の対応先は 4 or 100 ですから

$n=1$ or 25 **となり，後は消化試合となります。**

したがって，先ほどの主張（補題）を証明すればおしまいです。

この補題の証明の流れは少々難しいですが，$c<f$ と仮定すると，題意の恒等式に $x=\cos\dfrac{2\pi}{f}+i\sin\dfrac{2\pi}{f}$ を代入すれば矛盾します。

【解 2】(2)

$(1-x)P_\ell(x)=1-x^\ell$
$(1-x^2)P_m(x^2)=1-x^{2m}$
$(1-x^4)P_n(x)=1-x^{4n}$

よって，$P_\ell(x)P_m(x^2)P_n(x^4)=P_{100}(x)$ の両辺に $(1-x)(1-x^2)(1-x^4)$ をかけると

$(1-x^\ell)(1-x^{2m})(1-x^{4n})=(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1+x+x^2+\cdots+x^{99})$

$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{99})=1-x^{100}$ より，

$$(1-x^\ell)(1-x^{2m})(1-x^{4n})=(1-x^2)(1-x^4)(1-x^{100})$$

＜補題＞
a，b，c，d，e，f を自然数で $a \leqq b \leqq c$，$d \leqq e \leqq f$ のとき
$$(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)=(1-x^d)(1-x^e)(1-x^f)$$
が任意の x で成立するならば，$a=d$，$b=e$，$c=f$

この ＜補題＞ を認めれば，ℓ，$2m$，$4n$ は 2，4，100 のどれかと 1 対 1 対応する。

$4n$ が 4 の倍数ゆえ，$4n=4$，または 100

よって，$n=1$，25

$n=1$ のとき，ℓ，$2m$ は 2，100 のどれかと 1 対 1 対応

$(\ell, 2m)=(2, 100), (100, 2)$，すなわち $(\ell, m)=(2, 50), (100, 1)$

$n=25$ のとき，ℓ，$2m$ は 2，4 のどれかと 1 対 1 対応する。

$(\ell, 2m)=(2, 4), (4, 2)$，すなわち $(\ell, m)=(2, 2), (4, 1)$

以上から，求める ℓ，m，n の値の組は

$(\ell, m, n)=(2, 50, 1), (100, 1, 1), (2, 2, 25), (4, 1, 25)$ …答

＜補題 の証明＞

$c<f$ と仮定する。

$x=\cos\dfrac{2\pi}{f}+i\sin\dfrac{2\pi}{f}$ を代入すると，この値は f 乗して初めて 1 になる数なので

(左辺) $\neq 0$，(右辺)$=0$ となり矛盾。

$c>f$ としても同様に矛盾するので，$c=f$ を得る。

このとき，$(1-x^a)(1-x^b)=(1-x^d)(1-x^e)$ は x の恒等式

以下同様にして，$b=e$，$a=d$ を得る。

【総括】

体感の難易度の感じ方の差が激しいだと思います。

標準的だと感じる人，難しく感じる人など様々でしょう。

個人的には，受験生が限られた時間の中で不備なく論じきるにはハードルが高いと感じました。

ただし，

この方向性で突き進めば結論は出せる

という気持ちをもって粘り強く取り組めば，完答するのに決して無茶苦茶な難易度ではないとも言えると思います。

「じっくり考える時間がある」という前提で取り組むのであれば本問は良問でしょう。