時刻 $t=0$ に原点を出発し，xy 平面上で次の条件 (i)，(ii) に従っていろいろに運動する動点 P がある。

(i)　$t=0$ における P の速度を表すベクトルの成分は $(1,\ \sqrt{3})$ である。

(ii)　$0<t<1$ において，P は何回か (1 回以上有限回) 直角に左折するが，そのときを除けば P は一定の速さ 2 で直進する。

(ただし，左折するのに要する時間は 0 とする。)

このとき，時刻 $t=1$ において P が到達する点を Q として，Q の存在しうる範囲を図示せよ。

< ’76 東京大 >

【戦略】

何回左折するかが明確でないため，怯んでしまいかねませんが，
点 P が進む方向ベクトルは

$$\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$$

と周期的に変化するということで，逆に言えば，この 4 方向のいずれかの方向に向かって進んでいるしかないわけです。

そこで，1 秒間 (正確には単位は秒とは限りませんが，便宜上こう呼ばせてもらいます) のうち，上記の 4 方向に何秒間進んでいるかという

「内訳」

を捉えて立式します。

$$\overrightarrow{v}_1=\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix},\ \overrightarrow{v}_2=\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{v}_3=\begin{pmatrix}-1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix},\ \overrightarrow{v}_4=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$$

と設定し，

$\overrightarrow{v}_k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ **の方向に進んだ時間を** t_k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

とします。

すると，時刻 $t=1$ **における動点 P が到達する点 Q に対して**

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t_1\overrightarrow{v_1}+t_2\overrightarrow{v_2}+t_3\overrightarrow{v_3}+t_4\overrightarrow{v_4}\quad(t_1+t_2+t_3+t_4=1)$$

と Q の位置ベクトルが式として得られることになります。

ここで，ざっくりと等号についてラフに考えれば $0\leqq t_k<1$ **なのですが**
条件から t_1，t_2 **は 0 になることが許されません。**

つまり， $\begin{cases}0<t_1<1,\ 0<t_2<1\\0\leqq t_3<1,\ 0\leqq t_4<1\end{cases}$ **と等号が許されない** t_1，t_2 **と，等号が許される** t_3，t_4 **を分けて考えます。**

これを念頭に置きながら，内分外分のモノの見方

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(t_1+t_2)\cdot\frac{t_2\overrightarrow{v_2}+t_1\overrightarrow{v_1}}{t_1+t_2}+(t_3+t_4)\cdot\frac{t_4\overrightarrow{v_4}+t_3\overrightarrow{v_3}}{t_3+t_4}$$

という式変形まで辿り着ければしめたものです。

【解答】

左折するごとに，動点 P が動く方向を表す方向ベクトルは

$$\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$$

と周期的に変化する。

$\overrightarrow{v}_1=\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{v}_2=\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{v}_3=\begin{pmatrix}-1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{v}_4=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$ とし，

$\overrightarrow{v}_k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ の方向に進んだ時間を t_k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ とする。

すると，時刻 $t=1$ における動点 P が到達する点 Q に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t_1\overrightarrow{v_1}+t_2\overrightarrow{v_2}+t_3\overrightarrow{v_3}+t_4\overrightarrow{v_4}$$

と表せる。

ただし，t_1，t_2，t_3，t_4 は

ずっと直進は許されない

1 回は左折するという条件から $\overrightarrow{v_2}$ 方向に進んでいる時間は 0 ではない

$\overrightarrow{v_3}$，$\overrightarrow{v_4}$ 方向に進まない時間はあってもよい

$$0<t_1<1$$
$$0<t_2<1$$
$$0\leqq t_3<1$$
$$0\leqq t_4<1$$
$$t_1+t_2+t_3+t_4=1$$

を満たす実数である。

さて，このとき

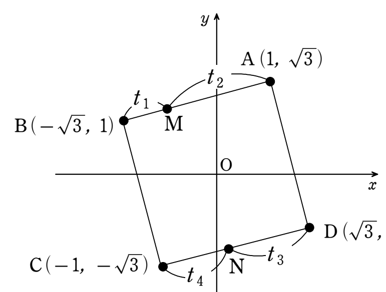
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(t_1+t_2)\cdot\frac{t_2\overrightarrow{v_2}+t_1\overrightarrow{v_1}}{t_1+t_2}+(t_3+t_4)\cdot\frac{t_4\overrightarrow{v_4}+t_3\overrightarrow{v_3}}{t_3+t_4}$$

$\mathrm{A}(1,\ \sqrt{3})$，$\mathrm{B}(-\sqrt{3},\ 1)$，$\mathrm{C}(-1,\ -\sqrt{3})$，$\mathrm{D}(\sqrt{3},\ -1)$ とする。

線分 AB を $t_2:t_1$ に内分する点を M，線分 CD を $t_4:t_3$ に内分する点を N とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{t_2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t_1\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{t_1+t_2}=\frac{t_2\overrightarrow{v_2}+t_1\overrightarrow{v_1}}{t_1+t_2}\qquad\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{t_4\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t_3\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{t_3+t_4}=\frac{t_4\overrightarrow{v_4}+t_3\overrightarrow{v_3}}{t_3+t_4}$$

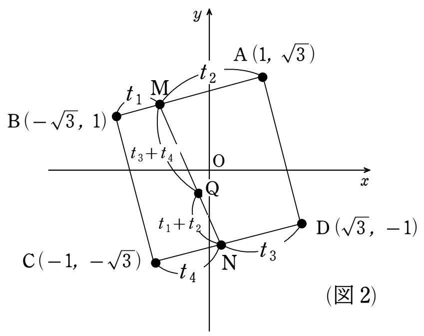
となり，(図 1) のようになる。



(図 1)

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= (t_1+t_2)\overrightarrow{\mathrm{OM}} + (t_3+t_4)\overrightarrow{\mathrm{ON}} \\
&= \{(t_1+t_2)+(t_3+t_4)\}\cdot\frac{(t_3+t_4)\overrightarrow{\mathrm{ON}}+(t_1+t_2)\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{(t_1+t_2)+(t_3+t_4)} \\
&= \frac{(t_3+t_4)\overrightarrow{\mathrm{ON}}+(t_1+t_2)\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{(t_1+t_2)+(t_3+t_4)}
\end{aligned}
$$

より，線分 MN を $t_3+t_4 : t_1+t_2$ に内分する点が Q ということになる。
((図 2) 参照)



(図 2)

(Ⅰ) $t_3+t_4 \fallingdotseq 0$ のとき

$$
\begin{cases} 0 < t_1+t_2 < 1 \\ 0 < t_3+t_4 < 1 \end{cases}
$$

このとき，$\begin{cases} \text{M は線分 AB 上} \\ \text{N は線分 CD 上} \end{cases}$ (いずれも端点は除く) を動きうる。

ゆえに，点 Q は線分 MN の端点以外を動き得ることも加味すれば
正方形 ABCD の内部を動きうる。

(Ⅱ) $t_3+t_4=0$ のとき

$t_3 \geqq 0$，$t_4 \geqq 0$ なので，$t_3+t_4=0$ を満たしているとき

$$t_3=0 \text{ かつ } t_4=0$$

を満たしている。

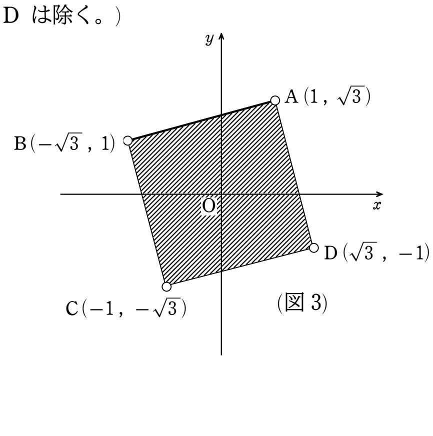
このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(t_1+t_2)\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

$t_1+t_2+t_3+t_4=1$ であり，$t_3+t_4=0$ であるから，$t_1+t_2=1$

つまり，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ であり，Q は線分 AB 上の点 M と一致する。
ただし，$0<t_1<1$，$0<t_2<1$ より，辺 AB の端点にはなり得ない。

これより，Q の存在範囲は辺 AB の端点以外である。

以上 (Ⅰ)，(Ⅱ) より，求める点 Q の存在範囲は以下の (図 3) の斜線部分。
(ただし，境界線は，辺 AB のみ含み，その他の境界線は含まず，4 頂点 A，B，C，D は除く。)



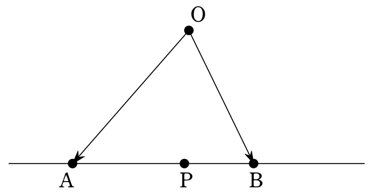
(図 3)

【総括】

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (s+t=1)$$

のときの点 P が動きうる範囲は直線 AB 上である。

【基礎の確認：係数を足して 1 ならば，先っちょ通る直線上】



直線 AB 上の点 P は 実数 t を動かすことで

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

と表現できる。

これより，

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \\
&= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}
\end{aligned}
$$

$s=1-t$ とおけば，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (s+t=1)$$

と表すことができる。

逆に，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(s+t=1)$ と表される点 P は上記の計算を逆に辿ることにより，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表され，点 P は直線 AB 上にあることが分かる。

本問は上記の基本を

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = t_1\overrightarrow{v_1} + t_2\overrightarrow{v_2} + t_3\overrightarrow{v_3} + t_4\overrightarrow{v_4} \quad (t_1+t_2+t_3+t_4=1)$$

という 4 変数に拡張した問題で，東大お得意の「こうなったらどうする？」といった味付けの良問だと思います。

問い方も，もろに聞くのではなく，薄皮一枚かぶせて聞くような問い方であり，どう料理するかという方針面から考えさせる問題です。