$xy$ 平面内の円 $C : x^2+y^2=4$ と点 P(1, 0) を考える。半径 2 の円 $C'$ が P を通りながら動くとき，$C$ と $C'$ が共有する弦の存在範囲を求めよ。

＜ ’94 東京都立大 ＞

**【戦略】**

**$C$, $C'$ の交点を Q，R としたときに線分 QR の通過領域が求める存在範囲です。**

**通過領域を考えるので，逆像法 ( しらみつぶしの考え方 ) で処理をすることを考えます。**

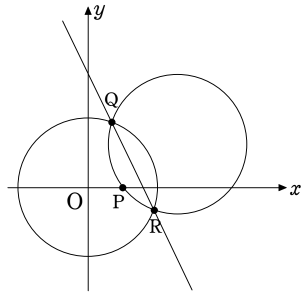
**今回は ” 線分 ” の通過領域なので，範囲付きの処理が目に見えます。**

**それは嫌なので，”一旦” は直線 QR の通過領域を考えて，**

**「そのうち $X^2+Y^2 \leqq 4$ を満たす部分」**

**と処理していきたい所です。**

【解答】




$C : x^2+y^2=4$ …①

$C' : (x-s)^2+(y-t)^2=4$ …②

$C'$ が P(1, 0) を通るので，$(1-s)^2+(0-t)^2=4$， すなわち

$$(s-1)^2+t^2=4$$

このとき，P は $C$ の内部の点であることから，$C$, $C'$ は相異なる 2 つの共有点 Q，R をもつ。

①−② より，$2sx-s^2+2ty-t^2=0$ …③

①，② を満たす $(x, y)$ は ③ を満たしている。

すなわち，①，② の交点は直線 ③ 上にあり，これは直線 ③ が直線 QR を表していることを意味する。

さて，求める弦 ( 線分 QR ) の存在領域を $D$ とする。

$(X, Y) \in D$ となるとき，$\begin{cases} 2sX+2tY-s^2-t^2=0 \\ (s-1)^2+t^2=4 \\ X^2+Y^2 \leqq 4 \end{cases}$ を同時に満たす実数 $s$，$t$ が存在する。

**ココにぶち込みます**
**※ 気が付かなかった場合については後述します。**

$(s-1)^2+t^2=4$ なので，$s^2+t^2=2s+3$ であることに注意すると，$(X, Y) \in D$ となるとき，

$\begin{cases} (2X-2)s+(2Y)t-3=0 \ \cdots ④ \\ (s-1)^2+t^2=4 \ \cdots ⑤ \\ X^2+Y^2 \leqq 4 \ \cdots ⑥ \end{cases}$ を同時に満たす実数 $s$，$t$ が存在する。

$st$ 平面において，直線 ④ と円 ⑤ が共有点をもつので，$st$ 平面における ⑤ の中心 (1, 0) と直線 ④ との距離を $d$ としたとき，$d \leqq 2$ となればよい。

$$d=\frac{|(2X-2)\cdot 1+(2Y)\cdot 0-3|}{\sqrt{(2X-2)^2+(2Y)^2}} = \frac{|2X-5|}{\sqrt{(2X-2)^2+(2Y)^2}}$$

ゆえに，$\dfrac{|2X-5|}{\sqrt{(2X-2)^2+(2Y)^2}} \leqq 2$ で，両辺 2 乗して $\dfrac{(2X-5)^2}{(2X-2)^2+(2Y)^2} \leqq 4$

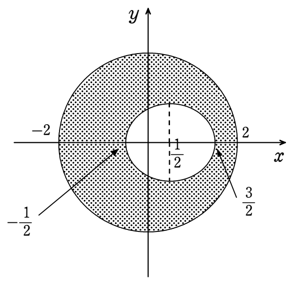
分母を払って整理すると，$12X^2-12X+16Y^2 \geqq 9$ ，すなわち

$$\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4}{3}Y^2 \geqq 1$$

を得る。

以上から，$(X,Y)\in D$ となる条件は $\begin{cases}\left(X-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{4}{3}Y^2\geqq 1\\ X^2+Y^2\leqq 4\end{cases}$

この領域 $D$ が求める存在領域であり，これを図示すると




【総括】

線分の通過領域ということであり，真正面からのガチ計算は茨の道です。

線分の通過領域は直線の通過領域の部分集合と捉え，まずは一旦直線の通過領域を考えて，$x^2+y^2\leqq 4$ でカットするということを思いつかないと限られた時間で処理するには大変でしょう。

その際，

$s^2+t^2=2s+3$ を用いて，「直線 ④ と円 ⑤ が共有点をもつ」という処理に気がつけるかということが完答できるかを分けるでしょう。

それに気が付かなかった場合の計算がどの程度大変なのかを検証してみます。

【検証】

上で述べたことに気が付かなかった場合，$\begin{cases}2sX+2tY-s^2-t^2=0\\ (s-1)^2+t^2=4\end{cases}$，

すなわち

$$\begin{cases}(s-X)^2+(t-Y)^2=X^2+Y^2\\ (s-1)^2+t^2=4\end{cases}$$

という 2 円が共有点をもつ条件を考えることになります。

これは，|半径の差|≦(中心間距離)≦(半径の和) と処理することになるので

$$\left|2-\sqrt{X^2+Y^2}\right|\leqq\sqrt{(X-1)^2+Y^2}\leqq 2+\sqrt{X^2+Y^2}$$

左側の不等式を両辺 2 乗すると $4-4\sqrt{X^2+Y^2}+X^2+Y^2\leqq(X-1)^2+Y^2$

整理して，$4\sqrt{X^2+Y^2}\geqq 2X+3$

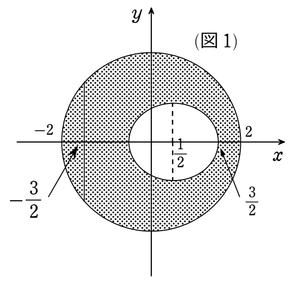
$X\geqq-\dfrac{3}{2}$ のとき，$16(X^2+Y^2)\geqq(2X+3)^2$，すなわち

$$\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4}{3}Y^2\geqq 1$$

$X<-\dfrac{3}{2}$ のとき，$4\sqrt{X^2+Y^2}\geqq 2X+3$ は常に成立

正　負

$(X,Y)$ が $X^2+Y^2\leqq 4$ を満たす領域に存在することを前提でまとめると，左側の不等式が成り立つ領域は 右の (図 1)




一方，右側の不等式を両辺 2 乗すると，

$$(X-1)^2+Y^2\leqq 4+4\sqrt{X^2+Y^2}+X^2+Y^2$$

整理して，$4\sqrt{X^2+Y^2}\geqq-2X-3$

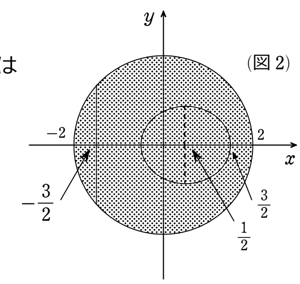
$X\leqq-\dfrac{3}{2}$ のとき，$16(X^2+Y^2)\geqq(-2X-3)^2$，すなわち

$$\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4}{3}Y^2\geqq 1$$

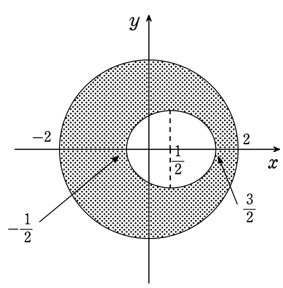
$X>-\dfrac{3}{2}$ のとき，$4\sqrt{X^2+Y^2}\geqq-2X-3$ は常に成立

正　負

よって，右側の不等式が成り立つ領域は右の (図 2)




以上から左側と右側の不等式が同時に成り立つ領域は結局




となります。