a，b は $a \geqq b > 0$ を満たす整数とし，x と y の２次方程式

$$x^2 + ax + b = 0,\ y^2 + by + a = 0$$

がそれぞれ整数解をもつとする。

(1)　$a = b$ とするとき，条件を満たす整数 a をすべて求めよ。

(2)　$a > b$ とするとき，条件を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

＜ ’11 名古屋大 ＞

【戦略 1】

$\begin{cases} \text{代入} \\ \text{解と係数の関係} \end{cases}$ という大枠の路線があります。

(1)　**整数解 $x = m$ を設定し，代入すると $m^2 + am + a = 0$ となります。**

積の形から約数を拾うことを狙って $m(m + a) = -a$ などとやっても一般の整数 a に対して約数を拾えず，ここで手詰まりとなりそうです。

そこで，解と係数の関係の路線で，整数解を α，もう一方の解を β とすると

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -a \\ \alpha\beta = a \end{cases}$$

という関係式を得ます。

これにより，$\beta = -a - \alpha$ と見れば，β も整数解となります。

一旦 a を消去すると，$\alpha\beta = -(\alpha + \beta)$，すなわち $\alpha\beta + \alpha + \beta = 0$ を得ます。

整数問題の典型問題を一通り経験しているのであれば，この時点で「勝負あり」で，$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 1$ という形に変形して解決します。

(2)　**結局，この２次方程式が整数解をもつのだとしたら**

・他方の解も整数解となる

・２つとも負の整数解となる

ということを看破する必要があります。

そこで，

$x^2 + ax + b = 0$ の整数解を α，β $(\alpha \leqq \beta < 0)$

$y^2 + by + a = 0$ の整数解を γ，δ $(\gamma \leqq \delta < 0)$

とすると，解と係数の関係から $\begin{cases} \alpha + \beta = -a \\ \alpha\beta = b \end{cases}$，$\begin{cases} \gamma + \delta = -b \\ \gamma\delta = a \end{cases}$

を得ることになります。

$a > b > 0$ であることから $-(\alpha + \beta) > \alpha\beta > 0$ となります。

右側の不等式は，$\alpha < 0$，$\beta < 0$ であることからほぼ自明なので，結局左側の不等式 $\alpha\beta + \alpha + \beta < 0$，すなわち $(\alpha + 1)(\beta + 1) < 1$ を得ます。

α，β は負の整数解ということから，$\alpha \leqq -1$，$\beta \leqq -1$ です。

つまり，$\alpha + 1 \leqq 0$，$\beta + 1 \leqq 0$ なので，$0 \leqq (\alpha + 1)(\beta + 1) < 1$ で，$(\alpha + 1)(\beta + 1)$ は整数ですから $(\alpha + 1)(\beta + 1) = 0$ と特定されます。

$\alpha \neq -1$ だと当然 $\beta = -1$ となりますが，$\alpha = -1$ であったとしても $\alpha \leqq \beta < 0$ から $-1 \leqq \beta < 0$ となり，$\beta = -1$ となります。

つまり，α はともかく，$\beta = -1$ であるということは確定します。

このとき，$\begin{cases} \alpha + \beta = -a \\ \alpha\beta = b \end{cases}$ に戻せば，$\begin{cases} \alpha - 1 = -a \\ -\alpha = b \end{cases}$

α を消去すれば $a - b = 1$ を得ます。

ここで，まだ手を付けていない $\begin{cases} \gamma + \delta = -b \\ \gamma\delta = a \end{cases}$ に目を向けて見ると

辺々足せば，$a - b$ が現れるため，$\gamma\delta + \gamma + \delta = 1$ を得て，「勝負あり」ということになります。

【解 1】

(1)　$x^2 + ax + a = 0$ が整数解をもつような a を求めればよい。

この整数解を α とし，もう一つの解を β とすると，
解と係数の関係から

$\begin{cases} \alpha + \beta = -a & \cdots ① \\ \alpha\beta = a & \cdots ② \end{cases}$ が成立する。

① より，$\beta = -a - \alpha$ より，β も整数となる。

また，$a > 0$ より，$x^2 + ax + a = 0$ が整数解をもつとしたら，その整数解は負の整数解である。 …③

①，② から a を消去すると，$\alpha\beta = -(\alpha + \beta)$

これを整理すると，$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 1$

③ より，$\alpha < 0$，$\beta < 0$ であるため，$\alpha + 1 < 1$，$\beta + 1 < 1$

$\alpha + 1$，$\beta + 1$ は整数であるため，$\begin{cases} \alpha + 1 = -1 \\ \beta + 1 = -1 \end{cases}$

これより，$(\alpha,\ \beta) = (-2,\ -2)$ であり，$a = 4$ …答

(2) (1) 同様に，題意の 2 次方程式が整数解をもてば，他方の解も整数となる。

また，$x^2+ax+b=0$，$y^2+by+a=0$ が整数解をもつとしたらそれらはともに負の整数解である。

これらに注意して

$x^2+ax+b=0$ の整数解を α，β $(\alpha \leqq \beta < 0)$
$y^2+by+a=0$ の整数解を γ，δ $(\gamma \leqq \delta < 0)$

と設定する。

解と係数の関係から $\begin{cases} \alpha+\beta=-a & \cdots ④ \\ \alpha\beta=b & \cdots ⑤ \end{cases}$ ，$\begin{cases} \gamma+\delta=-b & \cdots ⑥ \\ \gamma\delta=a & \cdots ⑦ \end{cases}$

条件 $a>b>0$ 及び ④，⑤ より，$-(\alpha+\beta)>\alpha\beta>0$

左側の不等式から $(\alpha+1)(\beta+1)<1$ を得る。

$\alpha \leqq \beta < 0$ なので，α，β は -1 以下の整数解であるため

$\alpha+1 \leqq 0$，$\beta+1 \leqq 0$ すなわち $(\alpha+1)(\beta+1) \geqq 0$

ゆえに，$0 \leqq (\alpha+1)(\beta+1) < 1$ を得て，$(\alpha+1)(\beta+1)$ は整数であるため

$$(\alpha+1)(\beta+1)=0$$

$\alpha=-1$ とすると，$-1 \leqq \beta < 0$ であり，$(\alpha, \beta)=(-1, -1)$

$\alpha \fallingdotseq -1$ とすると，$\beta=-1$

いずれにせよ，$\beta=-1$ が成立する。

④，⑤ より $\begin{cases} \alpha-1=-a \\ -\alpha=b \end{cases}$ であり，α を消去すると $-b-1=-a$

すなわち，$a-b=1$ … (☆) を得る。

一方，⑦＋⑥ より $\gamma\delta+\gamma+\delta=a-b$ で，(☆) より $\gamma\delta+\gamma+\delta=1$

これを整理すると $(\gamma+1)(\delta+1)=2$

$\gamma \leqq \delta \leqq -1$ であるため，$\gamma+1 \leqq \delta+1 \leqq 0$ であるから $\begin{cases} \gamma+1=-2 \\ \delta+1=-1 \end{cases}$

$$\therefore \ (\gamma, \delta)=(-3, -2)$$

このとき，$a=6$ であり，(☆) より $b=5$

以上から，求める整数の組 (a, b) は，$(a, b)=(6, 5)$ … 答

【戦略 2】(2) の部分的別解　方針のみ

【解 1】における ④，⑤，⑥，⑦ の左辺をすべて足すと

$$\alpha\beta+\alpha+\beta+\gamma\delta+\gamma+\delta=0$$

すなわち

$$(\alpha+1)(\beta+1)+(\gamma+1)(\delta+1)=2$$

です。

【解 1】で $(\alpha+1)(\beta+1)=0$ が得られたのであれば，即

$$(\gamma+1)(\delta+1)=2$$

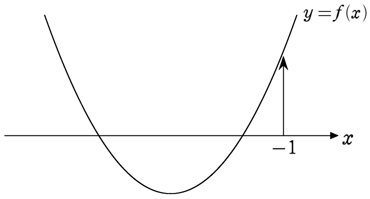
が得られることになります。

【戦略 3】(2) の視覚的方針

$f(x)=x^2+ax+b$ としたとき，

$f(x)=0$ がともに負の整数解 (-1 以下の解) をもつ

ということから，$f(-1)\geqq 0$ が成立することになります。



よって，$1-a+b\geqq 0$，すなわち $a\leqq b+1$ を得ます。

条件 $a>b$ も加味すれば，$b<a\leqq b+1$ となり，整数 a が連続 2 整数 b，$b+1$ で挟まれることになります。

等号の有無に気を付ければ，$a=b+1$ と特定されてしまいます。

【解 2】(2) について

$f(x)=x^2+ax+b$ がともに負の整数解 (-1 以下の解) をもつので

$f(-1)\geqq 0$，すなわち $1-a+b\geqq 0$ が成立し，$a\leqq b+1$ を得る。

一方，条件 $a>b$ も考えると，

$$b<a\leqq b+1$$

a，b は整数であるので，$a=b+1$ … (★)

このとき，$x^2+(b+1)x+b=0$ は $(x+1)(x+b)=0$ と変形でき

$x=-1$，$-b$ を解にもつ。

一方，$y^2+by+b+1=0$ について，これが整数解 γ をもつとしたら，もう一方の解 δ も整数解となる。

さらに，この整数解は負の整数解であるため，$\gamma\leqq\delta\leqq -1$ として考えても一般性を失わない。

解と係数の関係から $\begin{cases}\gamma+\delta=-b\\ \gamma\delta=b+1\end{cases}$ で，辺々加えると

$\gamma\delta+\gamma+\delta=1$，すなわち $(\gamma+1)(\delta+1)=2$ を得る。

$\gamma\leqq\delta\leqq -1$ であるため，$\gamma+1\leqq\delta+1\leqq 0$ であるから $\begin{cases}\gamma+1=-2\\ \delta+1=-1\end{cases}$

$$\therefore\ (\gamma,\ \delta)=(-3,\ -2)$$

このとき，$b=5$ であり，(★) より $a=6$

以上から，求める整数の組 $(a,\ b)$ は，$(a,\ b)=(6,\ 5)$ … 答

【総括】

(1) はできれば確保しておきたい難易度ですが，(2) は試験場では厳しい難易度でしょう。

色々な考え方ができそうですが，それによって紆余曲折を経ることも十分考えられ，挙句行き詰まるといった人も多いのではないかと推察します。

２次方程式の解の扱いとして，$\begin{cases}\text{代入}\\ \text{解と係数の関係}\end{cases}$ という路線が考えられますが，代入しても中々身動きがとりづらかったと思います。

【戦略 3】で考えた「視覚化」という路線については，ロジックを積み上げて辿り着くアイデアというよりは

やってみて気が付く

というタイプの路線でしょう。