(1) p，$2p+1$，$4p+1$ がいずれも素数であるような p をすべて求めよ。
(2) q，$2q+1$，$4q-1$，$6q-1$，$8q+1$ がいずれも素数であるような q をすべて求めよ。

＜ '05 一橋大 ＞

【戦略】

(1) p **そのものが素数となっていなければいけないわけです。**

$p=2$ **だと**，$2p+1=5$，$4p+1=9\,(=3^2)$

$p=3$ **だと**，$2p+1=7$，$4p+1=13$ **で，すべて素数。**

$p=5$ **だと**，$2p+1=11$，$4p+1=21\,(=3\cdot 7)$

$p=7$ **だと**，$2p+1=15\,(=3\cdot 5)$，$4p+1=29$

このあたりから，$p=3$ **のみではないかという予想が立ちます。**

つまり，必ず 3 **の倍数が紛れ込んでしまうことが予想されます。**

そこで，p **を** 3 **で割った余りで分類して考えます。**

3 **の倍数として紛れ込んでよいのは** 3 **そのものだけであることに注意します**

(2) $q=2$ **のとき** $2q+1=5$，$4q-1=7$，$6q-1=11$，$8q+1=17$

$q=3$ **のとき** $2q+1=7$，$4q-1=11$，$6q-1=17$，$8q+1=25\,(=5^2)$

$q=5$ **のとき** $2q+1=11$，$4q-1=19$，$6q-1=29$，$8q+1=41$

$q=7$ **のとき** $2q+1=15$，$4q-1=27$，$6q-1=41$，$8q+1=57$

このあたりで，必ず 5 **の倍数が紛れ込んでいることが予想されます。**

q **を** 5 **で割った余りで分類して考えます。**

(1) **同様に**，5 **の倍数として紛れ込んでよいのは** 5 **そのものだけであることに注意します。**

【解答】

(1) 以下，合同式の法は 3 とする。

(i) $p\equiv 0$（$p=3,\ 6,\ 9,\ \cdots$）のとき

$p>3$ だと p は合成数となるので，$p=3$ である必要がある。

このとき，

$$2p+1=7\text{(素数)},\quad 4p+1=13\text{(素数)}$$

となり，p，$2p+1$，$4p+1$ はいずれも素数である。

(ii) $p\equiv 1$（$p=1,\ 4,\ 7,\ \cdots$）のとき

$2p+1\equiv 3\equiv 0$ となる。

$p>1$ だと，$2p+1$ は 3 より大きな 3 の倍数となり，$2p+1$ は素数とならず，$p=1$ だと p が素数とならない。

(iii) $p\equiv 2$（$p=2,\ 5,\ 8,\ \cdots$）のとき

$4p+1\equiv 9\equiv 0$ となる。

$p\geqq 2$ に対して，$4p+1$ は 3 より大きな 3 の倍数となり，$4p+1$ は素数とならない。

以上 (i)，(ii)，(iii) から，求める p は $p=3$ …答

(2) 以下，合同式の法は 5 とする。

(ア) $q\equiv 0$（$q=5,\ 10,\ 15,\ \cdots$）のとき

q が素数となるためには $q=5$ である必要がある。

このとき

$$2q+1=11,\ 4q-1=19,\ 6q-1=29,\ 8q+1=41$$

となり，q，$2q+1$，$4q-1$，$6q-1$，$8q+1$ はいずれも素数である。

(イ) $q\equiv 1$（$q=1,\ 6,\ 11,\ \cdots$）のとき

$6q-1\equiv 5\equiv 0$

$q>1$ だと，$6q-1$ は 5 より大きな 5 の倍数となり，$6q-1$ は素数とならず，$q=1$ だと q が素数とならない。

(ウ) $q\equiv 2$（$q=2,\ 7,\ 12,\ \cdots$）のとき

$2q+1\equiv 5\equiv 0$

$q>2$ だと，$2q+1$ は 5 より大きな 5 の倍数となり，$2q+1$ は素数とならない。

$q=2$ だと，$2q+1=5$，$4q-1=7$，$6q-1=11$，$8q+1=17$ となり，q，$2q+1$，$4q-1$，$6q-1$，$8q+1$ はいずれも素数である。

(エ)　$q \equiv 3$ ($q=3,\ 8,\ 13,\ \cdots$) のとき

$8q+1 \equiv 25 \equiv 0$

$8q+1$ は 5 より大きな 5 の倍数となり，$8q+1$ は素数とならない。

(オ)　$q \equiv 4$ ($q=4,\ 9,\ 14,\ \cdots$) のとき

$4q-1 \equiv 15 \equiv 0$

$4q-1$ は 5 より大きな 5 の倍数となり，$4q-1$ は素数とならない。

以上 (ア)，(イ)，(ウ)，(エ)，(オ) より，求める q は $q=2,\ 5$ …答

【総括】

この類の問題は「何かの倍数が紛れ込む」のが決め手となります。

それを実験によって見出していきます。

(1) は 3 個の数だからどれかが 3 の倍数になるのでは？
(2) は 5 個の数だからどれかが 5 の倍数になるのでは？

という邪推でも辿り着けるかもしれませんが，あくまで邪推の域をこえません。