4 個の整数

$$n+1,\ n^3+3,\ n^5+5,\ n^7+7$$

がすべて素数となるような正の整数 n は存在しない。これを証明せよ。

＜ '13 大阪大 ＞

【戦略】

「ホントかよ」という気持ちで実験してみます。

実験するにしても，n が奇数のときは，登場人物が全て偶数かつ 2 より大きなものが含まれますから，全て素数ということは無理に決まっています。

そこで，$n=2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots$ として実験してみると

$n=2$ ： $3,\ 11,\ 37,\ 135\,(=3^3\cdot 5)$

$n=4$ ： $5,\ 67,\ 1029\,(=3\cdot 343),\ 16391$

もう少し実験を粘ってもよいですが，どうやら 3 の倍数が紛れ込むことが予想されます。

そこで，n そのものを 3 で割った余りで分類します。

$n=3k\,(k=1,\ 2,\ \cdots)$ **のとき**
$n=3k+1\,(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ **のとき**
$n=3k+2\,(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ **のとき**

と場合分けして考えると

$n=3k$ **のときは** $n^3+3=(3k)^3+3$ **は 3 の倍数**

$n=3k+1$ **のときは** $n^5+5=(3k+1)^5+5=3\cdot(\text{整数})+6$ **となり 3 の倍数**

$n=3k+2$ **のときは** $n^7+7=(3k+2)^7+7=3\cdot(\text{整数})+135$ **となり 3 の倍数**

と 3 の倍数が紛れ込みます。

3 の倍数の中で唯一素数であるのは 3 そのものですが，これらの 3 の倍数は 3 より大きいため，素数となり得ません。

【解答】では合同式を用いてスッキリと記述します。

【解答】

以下，合同式の法を 3 とする。

$n\equiv 0$ のときは $n^3+3\equiv 0$ であり，n^3+3 は 3 より大きな 3 の倍数。

$n\equiv 1$ のときは $n^5+5\equiv 0$ であり，n^5+5 は 3 より大きな 3 の倍数。

$n\equiv 2$ のときは $n^7+7\equiv 0$ であり，n^7+7 は 3 より大きな 3 の倍数。

よって，与えられた 4 個の整数すべてが素数となることはない。

【総括】

解答自体はあっという間に終わってしまいます。

この手の類の問題では「ホントかよ」という気持ちで

すべて素数になるように最善を尽くしてみる

ということが大切です。

その気持ちで最善を尽くそうと手を動かしても，結果合成数が紛れ込んでしまうわけです。

その合成数に特徴があれば，それを汲み取って予想を立てていきます。

なお，$n+1$ の存在感がなかったですが

$$\begin{aligned}(n^7+7)-(n+1)&=(n^7-n)+6\\&=n(n^6-1)+6\\&=n(n^3+1)(n^3-1)+6\\&=n(n+1)(n^2-n+1)(n-1)(n^2+n+1)+6\\&=(n-1)n(n+1)(n^2-n+1)(n^2+n+1)+6\\&=(\text{連続 3 整数の積})(n^2-n+1)(n^2+n+1)+6\\&=(6\text{ の倍数})+6\\&=(3\text{ の倍数})\end{aligned}$$

となり，$n+1\equiv n^7+7\ (\mathrm{mod}\ 3)$ であることを考えれば，存在感がないのも納得でしょう。

どうしても $n+1$ も使いたいのであれば，$n=3k+2$ のときにおいて，

$k=0$ のときは $n^7+7\equiv 0$ の方を用いる
$k\geqq 1$ のときは $n+1=3(k+1)\ (>3)$ とする

とすればいいでしょうが，別にそこまでする義理もありません。