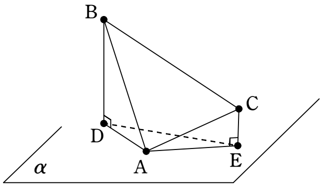
空間に平面 α と $\triangle \mathrm{ABC}$ がある。
$\angle \mathrm{BAC}=90^\circ$ であり，頂点 A は α 上にある。
頂点 B とCは，α に関して同じ側にある。
B とCから，α に下ろした垂線をそれぞれBD，CE とすると，BD の長さは CE の 2 倍である。
また，α 上の $\triangle \mathrm{ADE}$ の 3 辺の長さは 6，9，13 である。



(1) $(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}})$ の値を求めよ。
(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ の値を求めよ。
(3) DE の長さは 6，9，13 のうちどの値か。
(4) BD の長さを求めよ。

＜ '13 法政大 ＞

【戦略】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ **に注意すれば**

$$(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}})=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

となり，この値は 0 **となります。**

(2) (1) **で示した** $(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}})=0$ **を展開すれば**

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EC}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EC}}$$

となり，所望の $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ **が出てきます。**

余計な部分に目をつけると，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ **は直交していますし，** $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ **も直交していますから** $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EC}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=0$ **と言えます。**

(3) (2) **で得られる** $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EC}}=0$ **を移項し**

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=-\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EC}}$$

と見れば，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}<0$ **であることから，**$\angle\mathrm{DAE}$ **が鈍角だと言え鈍角三角形** $\triangle\mathrm{ADE}$ **の最大辺は** DE **だと分かりますから，**$\mathrm{DE}=13$ **が得られます。**

(4) (3) **で得た，**$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2=169$ **を** $|\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2=169$ **と見て展開すれば**

$$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2-2\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2=169$$

を得ます。

$(|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|,|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|)=(6,9),(9,6)$ いずれにしても $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=-26$ となり，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}&=-\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EC}}\\&=-|\overrightarrow{\mathrm{DB}}||\overrightarrow{\mathrm{EC}}|\\&=-2x\cdot x\ \text{（← 条件からこう置けます）}\\&=-2x^2\end{aligned}$$

から，$x=\sqrt{13}$ **を得て解決です。**

【解 1】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ なので

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}})&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=0\ \ (\because\ \angle\mathrm{BAC}=90^\circ)\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

(2) $(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}})=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EC}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EC}}$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{EC}}\perp\alpha$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}\perp\alpha$ であるため，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EC}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=0$$

ゆえに，$(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}})=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EC}}$

(1) の結果から，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EC}}=0$ …答

(3) (2) より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}&=-\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EC}}\\&=-|\overrightarrow{\mathrm{DB}}||\overrightarrow{\mathrm{EC}}|\cos 0\ \text{（}\overrightarrow{\mathrm{DB}},\overrightarrow{\mathrm{EC}}\text{は同じ方向を向いている）}\\&=-|\overrightarrow{\mathrm{DB}}||\overrightarrow{\mathrm{EC}}|\ \cdots\text{①}\\&<0\end{aligned}$$

ゆえに，$\angle\mathrm{DAE}$ は鈍角であり，$\triangle\mathrm{ADE}$ の最大辺は DE となる。

これより，$\mathrm{DE}=13$ …答

(4) (3) より $|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2=169$，すなわち $|\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2=169$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2-2\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2=169$$

$(|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|,|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|)=(6,9),(9,6)$ いずれにしても

$6^2+9^2-2\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=169$，すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=-26$ …②

ここで，条件から $\mathrm{CE}=x$，$\mathrm{BD}=2x$ $(x>0)$ とおける。

(3) の ① より，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=-x\cdot 2x$ …③

②，③ より $-2x^2=-26$ で $x^2=13$

$x>0$ なので，$x=\sqrt{13}$

$\mathrm{BD}=2x$ より，$\mathrm{BD}=2\sqrt{13}$ …答

【総括】

2019 年度の名古屋大学の問題よりもさらに丁寧な聞き方になっています。

ほぼ同じ問題と言ってよいため，座標の路線の解答については割愛します。